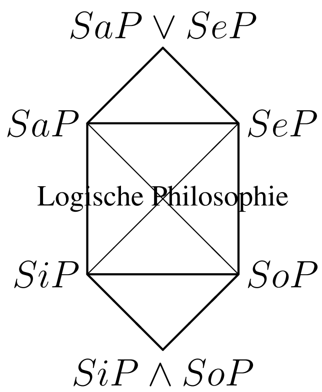
Wahrheit für Philosophen

(Die Logik kommt nach Hause)

Uwe Scheffler



Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Prädikatenlogik erster Stufe

Der einfachste Fall, in dem man mit Hilfe der Logik etwas interessantes über den Begriff der Wahrheit sagen kann, tritt in der Prädikatenlogik erster Stufe auf. Der Wahrheitsbegriff der Prädikatenlogik ist – im ersten Zugriff – ein aristotelischer: Eine Aussage ist genau dann wahr, wenn es sich so verhält, wie das in der Aussage behauptet wird. Um das ein bißchen genauer zu fassen, brauchen wir zunächst die Mittel, Aussagen von Nicht-Aussagen zu unterscheiden. Danach soll ganz abstrakt charakterisiert werden, wie man „über etwas" sprechen kann. Wenn das erreicht ist, kann eine Menge von Aussagen charakterisiert werden, die immer wahr sind, unabhängig davon, worüber man spricht und wie sich das verhält. Dies sind die logisch wahren Aussagen. Der interessante Punkt ist, daß sich zeigen läßt, daß alle korrekten Schlüssen auf solchen logisch wahren Aussagen beruhen und alle logisch wahren Aussagen Basis für korrekte Schlüsse sein können. Für dieses Ergebnis benötigt man eine Vorstellung davon, was ein (prädikatenlogisch) korrekter Schluß ist.

Entsprechend beginnt das Kapitel mit der Sprache der Prädikatenlogik, führt die Semantik und eine Axiomatik für die Prädikatenlogik ein und enthält als Hauptteil einige Theoreme über das Verhältnis von Semantik und Axiomatik.

Kompositionalität
Systematicity
Productivity

1.1 Die Semantik der Prädikatenlogik

1.1.1 Die Sprache

Wir betrachten eine Sprache erster Stufe ohne funktionale Konstanten[1]:

$x, y, z, x_1, \ldots$	Individuenvariablen
$a, b, c, a_1, \ldots$	Individuenkonstanten
$P, Q, R, P_1^1, \ldots$	Prädikatenkonstanten
$\sim, \supset$	aussagenlogische Operatoren
$\forall$	Quantor
$), ($	Klammern

Definition 1
Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist und $i_1, \ldots, i_n$ Individuenvariablen oder Individuenkonstanten sind, so ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine Prädikatformel. Nichts anderes ist Prädikatformel.

Definition 2

1. *Alleinstehende Prädikatformeln sind prädikatenlogische Formeln (plF).*
2. *Wenn A plF ist, ist auch $\sim A$ plF.*
3. *Wenn A und B plF sind, ist auch $(A \supset B)$ plF.*
4. *Wenn A plF und i eine Individuenvariable ist, ist auch $\forall i A$ plF.*
5. *Nichts anderes ist eine prädikatenlogische Formel.*

Definition 3
Der Wirkungsbereich eines Quantors $\forall i$ in einer Formel $\forall i A$ ist die Formel A.

Die Variable i kommt in einer Formel gebunden vor, wenn sie unmittelbar nach einem Quantorenzeichen oder im Wirkungsbereich eines Quantors, der sich auf i bezieht, vorkommt.

Vorkommen von Variablen die nicht gebunden sind, heißen freie Vorkommen.

[1]Funktionale Konstanten bilden Terme aus Termen, grundsätzlich ändern sie an den folgenden Beweisen nichts. Später (2.3) werden funktionale Konstanten betrachtet werden.

Die Sprache ist eine Sprache erster Stufe, weil durch die Quantoren nur Individuenvariablen gebunden werden. Anders ausgedrückt: Es gibt keine Variablen für Prädikate (Eigenschaften und Relationen), Argumentpositionen in Prädikatformeln können nur von Individuentermen (Konstanten oder Variablen) besetzt werden, nicht von Prädikattermen.

1.1.2 Modelle

Der Grundgedanke einer referentiellen Semantik besteht in der Annahme, daß sich die bedeutungstragenden Teile der Sprache auf bestimmte Weise auf einen Gegenstandsbereich beziehen: Individuenkonstanten und Prädikatenkonstanten nehmen Werte bezüglich eines nichtleeren Bereiches an. Dabei werden den namensartigen Ausdrücken, den Individuenkonstanten, Werte aus dem Bereich zugeschrieben, die Ausdrücke für Eigenschaften und Relationen bekommen Mengen von Elementen, von Paaren von Elementen, von Tripeln von Elementen usw. zugeschrieben. Auf diese Weise wird die Prädikation zum Enthaltensein eines Elementes in einer Menge: Der Satz, daß ein Gegenstand eine Eigenschaft hat, heißt, daß das bezeichnete Element des Gegenstandsbereiches Element der der Eigenschaft entsprechenden Menge ist.

Beispiel 1
Es sei der Gegenstandsbereich $\mathbb{E}$ die Menge der Ereignisse (was immer ein Ereignis auch sei), so könnte eine Interpretation für die Konstanten vielleicht folgendermaßen aussehen:

a_1	$\longrightarrow$	*die Party bei Mary*	$d_1 \quad (\in \mathbb{E})$
a_2	$\longrightarrow$	*der Kinobesuch mit Adam*	$d_2 \quad (\in \mathbb{E})$
a_3	$\longrightarrow$	*Freds Hochzeit*	$d_3 \quad (\in \mathbb{E})$
$\vdots$	$\longrightarrow$	$\dots$	$d_i \quad (\in \mathbb{E})$
P_1^1	$\longrightarrow$	*... ist unerwartet*	$\{d_i : d_i \textit{ ist unerwartet}\}$
P_1^2	$\longrightarrow$	*... ist später als ...*	$\{\langle d_i, d_j\rangle : d_i \textit{ ist später als } d_j\}$
P_2^2	$\longrightarrow$	*... verursacht ...*	$\{\langle d_i, d_j\rangle : d_i \textit{ verursacht } d_j\}$
$\vdots$	$\longrightarrow$	$\dots$	$\{\langle d_i, \dots, d_j\rangle : \textit{ in Relation} \dots\}$

Der Satz $P_2^2(a_2, a_3)$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn das Paar $\langle d_2, d_3\rangle$ Element der Menge von Paaren $\{\langle d_i, d_j\rangle : d_i \textit{ verursacht } d_j\}$ ist, das heißt eben: wenn dieser Kinobesuch die Hochzeit tatsächlich verursacht hat.

Betrachten wir noch einmal die Zuordnung $a_i \longrightarrow d_i$ oben. Die as sind Konstanten in der Sprache, sind Namen, die für die Satzbildung zur Verfügung stehen. Der Pfeil soll andeuten, daß das jeweilige a als ein ganz bestimmtes Ereignis interpretiert ist. Welches Ereignis das ist, kann man selbstverständlich auch nur sagen, *das heißt, um die Menge $\mathbb{E}$ über deren Mitglieder zu kennzeichnen, muß man diese* nennen. *Dazu benutzt man deren Namen in der Metasprache, aber die Menge selbst besteht nicht aus den Namen der Ereignisse in der Sprache, oder den Namen der Ereignisse in der Metasprache, sondern aus den Ereignissen selbst.*

Auch einfache Sätze mit Quantoren lassen sich entsprechend interpretieren, mit dem Quantor $\forall$ bezieht man sich auf jedes einzelne Objekt des Gegenstandsbereichs und $\forall x P_1^1(x)$ heißt, daß alle Elemente des Gegenstandsbereichs in die der Eigenschaft P_1^1 zugeschriebene Menge fallen. (Im Beispiel 1 wird mit dieser prädikatenlogischen Formel – sicher fälschlicherweise – behauptet, daß alle Ereignisse unerwartet sind.) Die Individuenvariablen nehmen also eine beliebige Bedeutung an, nachdem die Konstanten ihre Bedeutung zugeschrieben bekommen haben. Wie soll man dann aber prädikatenlogische Formeln wie $P_2^2(x, y)$ verstehen? Offenbar *behauptet* dieser Ausdruck nichts, jedenfalls nicht in dem Sinne wie $P_2^2(a_2, a_3)$ etwas behauptet, schließlich können x und y sowohl die Werte d_2 und d_3 entsprechend annehmen, als auch die Werte d_2 und (noch einmal) d_2. Je nachdem, welche Werte die Variablen bei einer fixierten Zuschreibung für die Konstanten bekommen, nehmen solche *offenen* Formeln (oder *Satzfunktionen*) einen Wahrheitswert an. Sätze, daß heißt prädikatenlogische Formeln ohne freie Vorkommen von Variablen, benötigen keine Belegung der Variablen, um einen Wahrheitswert zu haben.
Bevor diese Gedanken genauer in einer Definition gefaßt werden, sei hier auf einen wichtigen Punkt hingewiesen. Die Verwendung des Allquantors ist insofern wesentlich, als daß man mit Hilfe einzelner Sätze mit Individuenkonstanten immer nur über die Gegenstände im Gegenstandsbereich sprechen kann, die einen Namen haben. Sind im Gegenstandsbereich Objekte, die keinen Namen tragen, oder gar mehr Objekte, als es überhaupt Namen gibt, dann kann man sich mit $\forall x$ dennoch auf alle Elemente des Gegenstandsbereiches beziehen.

Beispiel 2
Betrachten wir noch einmal das Beispiel 1 – vermutlich gibt es viel mehr Ereignisse als sprachliche Mittel, die wir tatsächlich zur Bezeichnung von Ereignissen benutzen. Mehr noch, nach durchaus akzeptierten ontologischen Vorstellungen kann man Ereignisse zeitlich „konkretisieren“, um auf temporale Teile von Ereignissen

zu kommen, die selbst wieder Ereignisse sind: der Zweite Weltkrieg, der Zweite Weltkrieg zwischen 1943 und 1944, der zweite Weltkrieg zwischen Januar 1943 und Juli 1943 usw. sind alles (ineinander geschachtelte) Ereignisse. Im Extremfall erhält man wegen der Kontinuität der Zeit überabzählbar[2] viele Ereignisse im Gegenstandsbereich, die wegen der maximal abzählbar vielen Individuenkonstanten nicht mehr alle benannt sein können.

Wir verwenden in der folgenden Definition einen Gegenstandsbereich $\mathbb{D}$ (auch Individuenbereich, Universum, Domain genannt), eine Interpretationsfunktion $\mathcal{I}$, die den Konstanten Elemente bzw. Mengen von Tupeln von Elementen aus $\mathbb{D}$ zuschreibt, und eine Belegungsfunktion ν mit der Aufgabe, den Individuenvariablen Werte aus $\mathbb{D}$ zuzuschreiben. Die Funktionen werden auch „Interpretation" und „Belegung" genannt.

Definition 4
Sei $\mathbb{D}$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{I}$ eine Funktion, für die gilt:

1. *Wenn i eine Individuenkonstante ist, ist $\mathcal{I}(i) \in \mathbb{D}$ (ein Element von $\mathbb{D}$).*

2. *Wenn f eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, ist $\mathcal{I}(f) \subseteq \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}$ (eine Untermenge des n-fachen kartesischen Produktes von $\mathbb{D}$ mit sich selbst).*

Sei ν eine Funktion, für die gilt:
Wenn i eine Individuenvariable ist, ist $\nu(i) \in \mathbb{D}$ (ein Element von $\mathbb{D}$).

Das Paar $\mathcal{M} = \langle \mathbb{D}, \mathcal{I} \rangle$ wird Modell genannt und im folgenden wird definiert, wann eine Aussage A in einem Modell bei einer bestimmten Belegung erfüllt ist. Dafür verwenden wir $\mathcal{M}, \nu \models A$, synonym können wir sagen: Die Belegung ν erfüllt die Aussage A im Modell $\mathcal{M}$. Alle Fälle der Formeldefiniton 2 werden betrachtet:

Definition 5

1. *$\mathcal{M}, \nu \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathcal{F}(i_1), \ldots, \mathcal{F}(i_n) \rangle \in \mathcal{I}(f^n)$,*
wobei $\mathcal{F}(i_j) = \begin{cases} \mathcal{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \nu(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$

[2] Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie eineindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abgebildet werden kann – das heißt, wenn man sie entlang der natürlichen Zahlen ordnen, abzählen kann. Größere Mengen heißen überabzählbar, so ist beispielsweise die Menge der reellen Zahlen überabzählbar unendlich.

2. *$\mathcal{M}, \nu \models \sim A$ genau dann, wenn nicht $\mathcal{M}, \nu \models A$ (dafür wird manchmal $\mathcal{M}, \nu \not\models A$ geschrieben).*

3. *$\mathcal{M}, \nu \models A \supset B$ genau dann, wenn nicht $\mathcal{M}, \nu \models A$ oder $\mathcal{M}, \nu \models B$.*

4. *$\mathcal{M}, \nu \models \forall i A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}, \nu_i \models A$ für alle Belegungen ν_i, die sich von der Belegung ν höchstens im Wert für die Individuenvariable i unterscheiden.*

Der erste Punkt besagt, daß eine Prädikatformel dann in einem Modell bei einer Belegung erfüllt ist, wenn das n-Tupel der Interpretationen bzw. Belegungen der Subjektterme in der Interpretation der Prädikatkonstanten ist. Der zweite Punkt besagt, daß die Negation einer Aussage dann in einem Modell bei einer Belegung erfüllt ist, wenn die Aussage selbst in diesem Modell bei dieser Belegung nicht erfüllt ist. Im dritten Punkt wird festgelegt, daß eine Subjunktion nur dann in einem Modell erfüllt ist, wenn das Vorderglied bei dieser Belegung in diesem Modell nicht erfüllt oder das Hinterglied erfüllt ist. Im letzten Punkt wird der Begriff einer Belegung verwendet, die sich höchstens im Wert für eine Variable von einer bestimmten Belegung unterscheidet.

Beispiel 3
Betrachten wir eine Sprache mit nur drei Individuenvariablen, x, y und z. Sei $\mathbb{D}$ die Menge $\{d_1, d_2, d_5, d_{13}\}$. Die Ausgangsbelegung ν sei durch folgende Tabelle gegeben:

	x	y	z
ν:	d_1	d_1	d_2

Die einzigen Belegungen ν_y sind:

	x	y	z
$\nu_{y_1} = \nu$:	d_1	d_1	d_2
ν_{y_2}:	d_1	d_2	d_2
ν_{y_3}:	d_1	d_5	d_2
ν_{y_4}:	d_1	d_{13}	d_2

Der Punkt ist, daß sich die Werte für x und z nicht geändert haben, $\nu_y(y)$ dagegen jeden möglichen Wert aus $\mathbb{D}$ angenommen hat!

Die Formulierung im die Quantifikation betreffenden Punkt verlangt nichts anderes, als daß unter Beibehaltung der Interpretation und der Belegung für alle anderen außer der betrachteten Variablen, für letztere alle möglichen Werte zu überprüfen sind. Ist die Formel dann für alle Werte erfüllt, ist auch die entsprechende Allaussage bei dieser Belegung in diesem Modell erfüllt.

Die folgende Serie von Definitionen führt nun zum Begriff der Allgemeingültigkeit oder Tautologizität.

Definition 6
Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Belegung und ein Modell so gibt, daß die Formel in diesem Modell bei dieser Belegung erfüllt ist.

Eine Formel ist wahr (oder: erfüllt) in einem Modell ($\mathcal{M} \models A$), wenn sie in diesem Modell von jeder Belegung erfüllt ist.

Eine Formel ist allgemeingültig (tautologisch, logisch wahr, $\models A$), wenn sie in jedem Modell wahr ist.

Erfüllbarkeit, Erfülltheit und Allgemeingültigkeit drücken verschiedene Aspekte des natürlichsprachlichen Wahrheitsbegriffes aus. Wenn eine Formel erfüllt ist, so könnte eine (durch Individuenbereich und Interpretationsfunktion explizierte) Welt so sein, wie es in der Formel behauptet wird. Wenn eine Formel in einem Modell erfüllt ist, so expliziert dieses Modell eine Welt, die so ist, wie es in der Formel behauptet wird. Ist eine Formel allgemeingültig, so ist jede denkbare Welt von der Art, wie es in der Formel behauptet wird. Selbstverständlich erzwingt diese Redeweise nicht die Existenz von verschiedenen möglichen Welten. Genauso gut kann man über (faktische und kontrafaktische) Situationen in der Welt oder über unterschiedliche Theorien über die Welt sprechen. Bestimmte Voraussetzungen werden jedoch mit einer Konstruktion wie der in den Definitionen 5 und 6 getroffen, über die noch zu sprechen sein wird. Das betrifft insbesondere die Punkte, daß allen Individuenkonstanten ein Element des Gegenstandsbereiches zugeschrieben wird und daß der Gegenstandsbereich selbst eine nichtleere Menge ist.

Beispiel 4
Die Formel $P(x) \supset P(x)$ ist allgemeingültig, denn:

1. *Angenommen, $P(x) \supset P(x)$ ist nicht allgemeingültig. (Annahme des indirekten Beweises)*
2. *Also gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Belegung ν, bei der $P(x) \supset P(x)$ nicht erfüllt ist. (Definition 6)*
3. *Also muß bei dieser Belegung in diesem Modell $P(x)$ erfüllt und $P(x)$ nicht erfüllt sein. (Definition 5)*

4. *Dies heißt aber:* $\nu(x) \in \mathcal{I}(P)$ *und* $\nu(x) \notin \mathcal{I}(P)$. *(Definition 5)*

5. *Dies ist aber nicht möglich, also ist die (indirekte) Annahme falsch.*

Die Formel $\sim\forall x{\sim}P(x) \supset \forall x P(x)$ *ist nicht allgemeingültig, denn:*

1. *Sei* $\mathbb{D}$ *die Menge* $\{d_1, d_2\}$, $\mathcal{I}(P) = \{d_1\}$ *und* $\nu(x) = d_1$.

2. $\sim\forall x{\sim}P(x)$ *ist im Modell unter der Belegung erfüllt, denn bei* $\nu(x) = d_1$ *ist* $P(x)$ *erfüllt,* $\sim P(x)$ *nicht erfüllt,* $\forall x{\sim}P(x)$ *nicht erfüllt (schließlich liegt eine Belegung vor, bei der die Aussage im Wirkungsbereich des Quantors im Modell nicht erfüllt ist) und so ist* $\sim\forall x{\sim}P(x)$ *erfüllt und – da sie keine freien Variablen enthält – wahr im Modell.*

3. $\forall x P(x)$ *ist im Modell unter der Belegung nicht erfüllt, denn bei* $\nu_x(x) = d_2$ *ist* $P(x)$ *im Modell nicht erfüllt.*

4. *Also gibt es ein Modell und eine Belegung, bei der* $\sim\forall x{\sim}P(x) \supset \forall x P(x)$ *nicht erfüllt ist.*

Daß eine Formel allgemeingültig ist wird gezeigt, indem die Annahme, daß es ein widerlegendes Modell mit einer entsprechenden Belegung gibt, zum Widerspruch geführt wird. Daß eine Formeln nicht allgemeingültig ist, wird durch die Konstruktion eines widerlegenden Modells mit einer entsprechenden Belegung gezeigt.

Im Beispiel 4 wurde eine Tatsache benutzt, die hier explizit formuliert wird:

Satz 1
$\mathcal{M} \models A$ *genau dann, wenn* $\mathcal{M} \models \forall i A$.

Beweis Alle freien Variablen außer i spielen keine Rolle, da jede Belegung im Modell die Formeln erfüllt (von links nach rechts A, von rechts nach links $\forall i A$). Betrachten wir i, so gilt $\mathcal{M} \models A$ wenn für jede Belegung ν gilt: $\mathcal{M}, \nu \models A$. Da dies für jede Belegung gilt, so auch für alle ν_i. Also gilt für alle ν $\mathcal{M}\nu \models \forall i A$, das heißt: $\mathcal{M} \models \forall i A$.

Weiter heißt $\mathcal{M} \models \forall i A$, daß $\mathcal{M}, \nu_i \models A$ für alle ν_i – da nach Voraussetzung die anderen Variablen keine Rolle spielen, sind die i-Varianten von ν die einzigen zu betrachtenden. Also gilt $\mathcal{M} \models A$.

Ein wichtiger Punkt ist, daß zwar

Satz 2
Wenn $\mathcal{M}, \nu \models \forall iA$*, so* $\mathcal{M}, \nu \models A$

gilt, aber nicht die Umkehrung dieses Satzes.

Beweis Die Belegung der Variablen i durch ν spielt bei der Bewertung von $\forall iA$ keine Rolle, da A bei jeder Belegung von i unter $\mathcal{M}$ und ν erfüllt ist. Dann aber auch unter der, die ν dem i zuschreibt und es gilt $\mathcal{M}, \nu \models A$.

Im Gegensatz dazu kann $\mathcal{M}, \nu \models A$ sehr wohl durch ein passend gewähltes ν gültig sein, während aber nicht jede andere Belegung von i die Formel gültig im Modell werden läßt. Dann ist aber $\mathcal{M}, \nu \not\models \forall iA$.

Diese Ergebnisse erklären, warum die uneingeschränkte Regel

$$\frac{A}{\forall iA}$$

zwar eine Beweisregel, aber keine Ableitungsregel in der Prädikatenlogik ist (vgl. Seiten 17 und 20). In Beweisen kommen, wie sich zeigen wird, nur allgemeingültige Formeln vor, so daß die Regel, die schließlich Allgemeingültigkeit erhält, uneingeschränkt angewendet werden darf. In Ableitungen kommen Annahmeformeln vor, die sogar logisch falsch sein können – hier muß die Regel eingeschränkt werden. Die Formel[3]

$$\forall iA \supset A\{i/j\}$$

dagegen ist uneingeschränkt gültig und die entsprechende Regel erhält (vererbt) sogar die Gültigkeit im Modell unter einer Belegung.

Ebenso einsichtig ist, daß eine reine Umbenennung der freien Vorkommen einer Individuenvariablen in eine neue Konstante bezüglich der Erfüllbarkeit in einem Modell keine Rolle spielt:

Definition 7
Mit $A|\,^i_j$ *wird die Substitution aller freien Vorkommen der Individuenvariablen* i *in* A *durch die Individuenkonstante* j *bezeichnet.*

[3] Mit $A\{i/j\}$ wird das Resultat der Substitution aller freien Vorkommen der Individuenvariablen i in A durch die Individuenvariable oder -konstante j bezeichnet, weiter unten wird dies genauer gefaßt.

Satz 3
Sei j eine Individuenkonstante, die in A nicht vorkommt, und i eine Individuenvariable. Es gilt:

Es gibt genau dann ein $\mathcal{M}$ und ein ν so, daß $\mathcal{M}, \nu \models A$, wenn es ein $\mathcal{M}'$ und ein ν' so gibt, daß $\mathcal{M}', \nu' \models A|\,^i_j$.

(Folgerung:) $\models A$ genau dann, wenn $\models A|\,^i_j$.

Beweis Wir betrachten von links nach rechts eine Interpretation $\mathcal{I}'$, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, daß $\mathcal{I}'(j) = \nu(i)$. Die Belegungen sind für beide Modelle gleich, dann gilt $\mathcal{M}', \nu \models A|\,^i_j$ falls $\mathcal{M}, \nu \models A$ gilt.

Umgekehrt betrachten wir eine Belegung, die sich von ν' nur dadurch unterscheidet, daß $\nu(i) = \mathcal{I}'(j)$. Die Interpretationen sind für beide Modelle gleich, dann gilt $\mathcal{M}, \nu \models A$ falls $\mathcal{M}', \nu \models A|\,^i_j$ gilt.

Für die Folgerung überlege man sich, daß wenn jede Interpretation für eine Konstante für jeden Bereich und jede Belegung die Formel erfüllt, dann auch jede Belegung für jeden Bereich und jede Interpretation die Formel erfüllt und umgekehrt.[4]

Beispiel 5
Definieren wir die Adjunktion entsprechend ihrer Verwendung in der Aussagenlogik: $A \vee B \approx {\sim}A \supset B$, so bekommt sie folgende semantische Charakteristik:

$\mathcal{M}, \nu \models A \vee B$ genau dann, wenn $\mathcal{M}, \nu \models A$ oder $\mathcal{M}, \nu \models B$.

Die Aussage $P(a) \vee {\sim}P(a)$ ist eine Tautologie, jedoch kann man sich fragen, warum eine Aussage über einen bestimmten Gegenstand (nämlich über das von a bezeichnete) überhaupt tautologisch sein kann, schließlich sollen Tautologien nichts über die Welt aussagen und Gesetze sollen allgemein sein. Die Antwort liegt in den Sätzen oben: $\models P(a) \vee {\sim}P(a)$ heißt, jede Interpretation macht diese Aussage wahr, dies heißt, daß jede Belegung (bei jeder Interpretation) $P(x) \vee {\sim}P(x)$ wahr macht (denn $P(a) \vee {\sim}P(a)$ ist $(P(x) \vee {\sim}P(x))|\,^x_a$), und letzteres heißt einfach – $\models \forall x(P(x) \vee {\sim}P(x))$. Aussagen mit Konstanten und freien Vorkommen

[4] Der Satz 3 wird benötigt, weil wir an späterer Stelle nur Sätze, das heißt Formeln ohne freie Vorkommen von Variablen betrachten wollen. Um aber die notwendige Allgemeinheit zu erhalten, gehen wir von beliebigen Formelmengen aus und substituieren die freien Vorkommen der Variablen gegen neue Individuenkonstanten und Satz 7 garantiert, daß falls die Satzmenge ein Modell hat (erfüllbar ist), die Formelmenge ebenfalls erfüllbar ist.

von Variablen sind insofern logisch wahr, als daß sie Einsetzungsinstanzen logisch wahrer allquantifizierter Aussagen sind. Das philosophische Diktum „Es gibt keine Gesetze für den Einzelfall“ behält seine Gültigkeit.

1.1.3 Semantische Folgebeziehung (Implikation)

Erfüllbarkeit und Wahrheit sind Eigenschaften, die leicht auf Mengen von Formeln erweitert werden können:

Definition 8
Sei $\mathbf{K}$ *eine Menge von Formeln.* $\mathbf{K}$ *heißt erfüllbar (wahr) in einem Modell, wenn jede Formel dieser Formelmenge erfüllbar (wahr) in diesem Modell ist. Im Fall einer erfüllbaren Formelmenge sagt man, diese besitzt ein Modell.*

Aussagen garantieren manchmal die Wahrheit anderer Aussagen: Wenn alle Voraussetzungen eines Argumentes wirklich wahr sind, sollte das die Wahrheit der Schlußfolgerung garantieren. Dieser Gedanke ist in der folgenden Definition formuliert worden:

Definition 9
$\mathbf{K} \models A$ *genau dann, wenn aus* $\mathcal{M} \models \mathbf{K}$ *folgt, daß* $\mathcal{M} \models A$.

Die Aussage A folgt genau dann semantisch aus der Menge der Aussagen $\mathbf{K}$, wenn jedes Modell für $\mathbf{K}$ auch ein Modell für A ist.

Beispiel 6
Einfache Fälle von Implikationen sind uns allen bekannt, beispielsweise aus Berichten über Indizienprozesse: Wenn es stimmt, daß der Butler im Garten war zur fraglichen Zeit, und es auch richtig ist, daß er allein Zugang zum Schlüssel hatte, dann ist es auch wahr, daß er der Mörder ist. Jede Situation, in der die Sätze der vorausgesetzten Satzmenge wahr wären und der Butler nicht der Mörder wäre, wäre widersprüchlich, nicht vernünftig denkbar. Kompliziertere Fälle beginnen beispielsweise mit den Worten: „Wenn die Gesetze der Quantenmechanik tatsächlich gelten sollten, dann müßte auch … “.

Das Zeichen „$\models$“ wird also von nun an systematisch mehrdeutig verwendet[5]: Steht links davon ein Modell und rechts eine Aussage, so handelt es sich um das Gültig-Sein, steht links davon eine Aussage oder Aussagenmenge, so sprechen wir über die Implikation.

[5] Dies ist so üblich in der Logik-Literatur.

1.2 Der axiomatische Aufbau der Prädikatenlogik

Bisher wurde eine Eigenschaft von Aussagen und eine Relation zwischen Aussagen (-mengen) und Aussagen betrachtet: allgemeingültig zu sein und zu implizieren. Mit diesen Begriffen wird der Wahrheitsbegriff modelliert, mit einer Interpretation und einem Individuenbereich ist festgelegt, wie die Welt aussieht, auf die sich die Sprache bezieht. Eine Aussage ist logisch wahr (allgemeingültig), wenn sie wahr in jedem Modell und damit unabhängig davon ist, wie die Welt tatsächlich ist. Eine Aussage wird von einer Aussagenmenge impliziert, wenn sie wahr in jeder Welt ist, in der die Aussagenmenge wahr ist.

Was Menschen über die Welt wissen, was sie für wahr halten, wird in der Regel nicht unzusammenhängend und unsystematisch irgendwo abgelegt, sondern lernbar, mit einer Argumentationsstruktur im Hintergrund und möglichst ökonomisch: als Theorie. Aus der Sicht der Logik sind Theorien Satzmengen, die deduktiv abgeschlossen sind – wenn Aussagen zu einer Theorie gehören, dann gehört das, was man aus den Aussagen logisch erschließen kann, ebenfalls zur Theorie. Die Bedeutung von „logisch erschließen" ist der Gegenstand dieses Abschnitts. Es wird zunächst definiert, was ein Beweis ist und es wird sich später zeigen, daß genau die logisch wahren Aussagen *voraussetzungslos* beweisbar sind. Danach wird geklärt, was eine Ableitung aus einer Formelmenge ist und wie Ableitungen und Beweise zusammenhängen. Das Mittel der Wahl ist der axiomatische Aufbau der Prädikatenlogik: Einige Formeln werden ausgewählt, aus denen nach bestimmten Regeln geschlossen werden darf.

1.2.1 Axiome und Schlußregeln

Ein Axiom ist jede Formel, die die Form eines der folgenden Axiomenschemata hat:

A1 $A \supset (B \supset A)$

A2 $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$

A3 $\sim B \supset \sim A \supset (A \supset B)$

A4 $\forall i A \supset Ai/j$, wobei Ai/j das Resultat der Substitution aller freien Vorkommen von i in A durch die Variable oder Konstante j ist und kein freies

Vorkommen von i durch die Substitution zu einem gebundenen Vorkommen von j wird[6].

A5 $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall iB)$, wobei i in A nicht frei vorkommt.

Beispiel 7
Zu den Axiomen des Systems gehören beispielsweise die Formeln
A1: $P(y) \supset \sim Q(y) \supset (\sim\sim P(z) \supset (P(y) \supset \sim Q(y)))$
A4: $\forall z(P(x) \supset (Q(z) \supset \sim\forall zP(z)) \supset (P(x) \supset \forall z(Q(z) \supset \sim\forall zP(z)))$

Die beiden einzigen Regeln des Systems sind die Abtrennungs- und die Generalisierungsregel:

MP
$$\frac{\begin{array}{c}A \supset B\\ A\end{array}}{B}$$

Gen
$$\frac{A}{\forall iA}$$

Theoreme im System sind Formeln, die mit Hilfe der Regeln aus den Axiomen erhalten werden können:

Definition 10
Ein Beweis einer Formel A ist eine endliche Folge von Formeln, von denen jede ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Formeln der Folge nach einer der Regeln gewonnen wurde und die mit der Formel A endet.

Ein Theorem ist eine Formel, für die es einen Beweis gibt.

Ob eine Formelfolge ein Beweis ist oder nicht läßt sich in jedem Falle effektiv entscheiden: Für jeden einzelnen Schritt muß angegeben werden können, welches Axiom gerade verwendet wurde oder aus welchen Zeilen durch Anwendung welcher Regel die Zeile gewonnen wurde. Für ein und dieselbe Formel können selbstverständlich verschiedene Beweise angegeben werden, jedoch kann eine Formel nicht beweisbar und nicht beweisbar sein. Außerdem kann man in Beweisen offenbar bereits bewiesene Theoreme verwenden: Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Formelfolge, die ein Beweis der Formel A_n bis auf die Formel A_k ist und sei A_k ein Theorem. Dann läßt sich die Formelfolge in einen Beweis verwandeln, indem anstelle der Formel A_k der komplette Beweis dieser Formel eingesetzt wird. Denn anschließend genügt die Formelfolge der Definition eines Beweises – alle Formeln sind Axiome oder aus vorhergehenden nach den Regeln gewonnen und die letzte Formel ist A_n.

[6]Dies nennt man: j ist frei für eine Einsetzung in i

Beispiel 8
Nicht alle Beweise sind wirklich schwierig:

1. $\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}P(x)$ *A4*
2. $(\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}P(x)) \supset (P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x))$ *Einsetzung in ein aussagenlogisches Theorem*
3. $P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)$ *Abtrennungsregel aus 1,2*
4. $\forall x P(x) \supset P(x)$ *A4*
5. $(\forall x P(x) \supset P(x)) \supset ((P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)) \supset (\forall x P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)))$ *Einsetzung in ein aussagenlogisches Theorem*
6. $\forall x P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)$ *zweimal Abtrennungsregel*

Unter der Voraussetzung, daß für die erwähnten aussagenlogischen Theoreme deren Beweise eingesetzt werden, ist die Formelfolge ein Beweis der Formel $\forall x P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}P(x)$[7]*: Sie ist endlich, besteht aus Axiomen oder Formeln, die aus darüberliegenden Gliedern der Folge nach den Regeln gewonnen wurde und endet mit der zu beweisenden Formel.*

Um beweisen zu können, sind an den Beginn der Beweise prädikatenlogische Tautologien gesetzt worden:

Lemma 4
Alle Axiome sind allgemeingültige Formeln.

Beweis Die Axiome der ersten drei Gruppen sind Einsetzungen in aussagenlogische Tautologien. Da die semantischen Regeln für Negation $\sim$ und Subjunktion $\supset$ sich nicht von denen der Aussagenlogik unterscheiden, sind aussagenlogische Tautologien und Einsetzungen in diese prädikatenlogisch allgemeingültig.

Angenommen, Axiom A4 ist nicht allgemeingültig. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Belegung ν so, daß

1. $\mathcal{M}, \nu \not\models \forall i A \supset A\{i/j\}$, also
2. $\mathcal{M}, \nu \models \forall i A$ und

[7]Diese Formel besagt: Was für alle gilt, gilt auch für einige.

3. $\mathcal{M}, \nu \not\models A\{i/j\}$; dies heißt

4. für jedes ν_i gilt $\mathcal{M}, \nu_i \models A$

Nun ist aber einer der Werte, den $\nu_i(i)$ durchlaufen muß, der Wert den $\nu(j)$ bzw. $\mathcal{I}(j)$ annimmt. Mit diesem Wert läßt sich ein Widerspruch herbeiführen. Also ist A4 allgemeingültig.

Angenommen, Axiom A5 ist nicht allgemeingültig. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Belegung ν so, daß

1. $\mathcal{M}, \nu \not\models \forall i(A \supset B) \supset (A \forall iB)$, also

2. $\mathcal{M}, \nu \models \forall i(A \supset B)$ und

3. $\mathcal{M}, \nu \not\models A \supset \forall iB$; also

4. $\mathcal{M}, \nu \models A$ und

5. $\mathcal{M}, \nu \not\models \forall iB$, dies heißt

6. für ein ν_i $\mathcal{M}, \nu_i \not\models B$

7. da auch gilt: für alle ν_i $\mathcal{M}, \nu_i \models A \supset B$

läßt sich ein Widerspruch für den Wert konstruieren, der B nicht erfüllt sein läßt. Diese Belegung ändert nicht an der Erfüllung von A, da i nicht in dieser Formel vorkommt.

Die Regeln vererben die Eigenschaft, in einem Modell bei jeder Belegung erfüllt zu sein: Wendet man sie auf solche Aussagen an, dann ist das Ergebnis der Anwendung eine Formel mit derselben Eigenschaft:

Lemma 5
*Die Regeln **MP** und **Gen** erhalten die Eigenschaft, in einem Modell bei jeder Belegung erfüllt zu sein.*

Beweis Die Abtrennungsregel läßt es wegen der semantischen Definition der Subjunktion (vgl. Definition 5) nicht zu, daß eine Belegung in einem Modell B nicht erfüllt, aber $A \supset B$ und A.

Für die Generalisierungsregel wurde das Lemma bereits bewiesen – vgl. Satz 1.

Jeder Beweis einer Formel A ist eine Formelfolge, die aus Axiomen und Anwendungen der Regeln auf vorhergehende Formeln besteht. Damit hat jedes Theorem die Eigenschaft, in jedem Modell bei jeder Belegung erfüllt zu sein:

Satz 6
Jedes Theorem ist allgemeingültig.

Beweis Der Beweis ist eine Induktion über die Länge des Beweises mit Hilfe der eben bewiesenen Lemmata 4 und 5.

1.2.2 Die Ableitbarkeitsbeziehung

Beweise sind nicht nur verhältnismäßig schwierig zu führen, in der Wissenschaftspraxis wird selten allein aus logischen Axiomen geschlossen. Statt dessen verwendet man Prämissen, das heißt Formeln, die Weltwissen ausdrücken und aus denen wahrheitserhaltend auf andere Aussagen geschlossen werden soll. Was aber heißt hier „wahrheitserhaltend"? Wenn die Prämissen gemeinsam in einem Modell bei einer Belegung erfüllt sind, dann soll auch die Schlußfolgerung bei dieser Belegung in diesem Modell erfüllt sein. Offenbar gibt es bei dieser Forderung Schwierigkeiten mit der Generalisierungsregel, denn wie bereits im Zusammenhang mit Satz 2 gezeigt wurde, erhält diese Regel die geforderte Eigenschaft nicht. Sie wird entsprechend eingeschränkt:

Definition 11
Eine Ableitung der Formel B aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ ist eine endliche Folge von Formeln, von denen jede ein Axiom oder eine Annahmeformel $A_1, \ldots, A_n$ oder aus vorhergehenden Formeln nach einer der Regeln gewonnen worden ist, wobei nur über Variablen generalisiert werden darf, die nicht frei in den Annahmeformeln vorkommen, und die auf die Formel B endet.

Für Ableitungen der definierten Art schreiben wir $A_1, \ldots, A_n \vdash B$. Wesentlich an dieser Definition ist, daß die Ableitung für endlich viele Prämissen definiert ist, auch der Begriff der Ableitung garantiert, daß von jeder Formelfolge entschieden werden kann, ob sie eine bestimmte Ableitung ist oder nicht. Weiterhin „greift" die Einschränkung: Generalisiert werden darf nur noch über (freie) Variablen, die aus Axiomen stammen (und hier erhält die Regel die Gültigkeit bei jeder Belegung) oder bei denen der Allquantor vorhanden war und über eine Anwendung von A4 beseitigt wurde. Auch in diesem Falle ist die entsprechende Aussage bei jeder Belegung dieser Variablen im Modell gültig und diese Eigenschaft wird ja erhalten.

Beispiel 9
Die folgende Formelfolge ist eine Ableitung von $\forall x(P(x) \supset R(x))$ aus der For-

melmenge $\{\forall x(P(x) \supset Q(x)), \forall x(Q(x) \supset R(x))\}$ *(*$\forall x(P(x) \supset Q(x)), \forall x(Q(x) \supset R(x)) \vdash \forall x(P(x) \supset R(x))$*):*

1. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ *Annahme*
2. $\forall x(Q(x) \supset R(x))$ *Annahme*
3. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (P(x) \supset Q(x))$ *A4*
4. $\forall x(Q(x) \supset R(x)) \supset (Q(x) \supset R(x))$ *A4*
5. $P(x) \supset Q(x)$ ***MP***
6. $Q(x) \supset R(x)$ ***MP***
7. $(P(x) \supset Q(x)) \supset ((Q(x) \supset R(x)) \supset (P(x) \supset R(x)))$ *aussagenlogisches Theorem*
8. $P(x) \supset R(x)$ *zweimal* ***MP***
9. $\forall x(P(x) \supset R(x))$ ***Gen***

Die Generalisierungsregel durfte im letzten Schritt angewendet werden, da die Variable x nicht frei in den Annahmeformeln vorkommt. Man beachte, daß die Variable in den Annahmeformeln vorkommt (aber nicht frei) und sogar frei in den verwendeten Axiomen vorkommt (aber nicht in den Annahmeformeln).

Was genau ist denn eigentlich gezeigt worden, wenn eine Ableitung durchgeführt wurde? Es ist gezeigt, daß *wenn* man die Annahmen akzeptiert, man die Schlußfolgerung mit rein logischen Mitteln erhalten kann. Dann sollte der Satz, der ausdrückt, daß wenn die Prämissen gelten auch die Schlußfolgerung gilt, ein logisch wahrer sein. Dies ist auch der Fall, wie aus dem folgenden Satz über den Zusammenhang bestimmter Ableitungen folgt:

Satz 7 ***(Deduktionstheorem)***
Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$*, so* $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$*.*

Beweis $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist lediglich eine Bezeichnung für eine Formelfolge, sei dies die Folge $C^1, \ldots, C^m$, wobei $C^1, \ldots, C^m$ der Definition von $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ genügt: Jede der Aussagen $C^1, \ldots, C^m$ ist entweder ein Axiom, oder eine der Formeln $A_1, \ldots, A_n$ oder aus vorhergehenden nach den Regeln gewonnen (wobei **Gen** eingeschränkt ist) und C^m ist B. Es wird nun gezeigt werden, daß für jedes $1 \leq k \leq m$ die Formel $A_n \supset C^k$ aus $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ableitbar ist. Das Beweisverfahren ist eine Induktion über die Länge der Ableitung $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$:

Für den Induktionsanfang betrachten wir die Formel C^1. Da diese Formel die erste in der Ableitung ist, kann sie nicht aus vorhergehenden nach Regeln gewonnen worden sein. Also:

$$C^1 \text{ ist } \begin{cases} A_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } A_{n-1} & \text{eine Annahmeformel, aber nicht } A_n \\ A_n & \\ \text{A1 oder } \ldots \text{ oder A5} & \text{ein Axiom} \end{cases}$$

Die Fälle werden nacheinander betrachtet:

Sei C^1 eine der Annahmeformeln A_i mit $i \neq n$. Dann ist $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^1$ die folgende Formelfolge:

1. A_i (Annahmeformel)
2. $A_i \supset (A_n \supset A_i)$ (A1)
3. $A_n \supset A_i$ (MP)

Sei C^1 die Formel A_n. Dann ist $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^1$ die folgende Formelfolge:

1. $A_n \supset A_n$ (Theorem der Aussagenlogik)

Sei C^1 eines der Axiome **A**i mit $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann ist $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^1$ die folgende Formelfolge:

1. **A**i (Axiom)
2. **A**i $\supset (A_n \supset$ **A**i$)$ (A1)
3. $A_n \supset$ **A**i (MP)

Für den Induktionsschritt wird vorausgesetzt, daß für alle Formeln mit einer kleineren Nummer als k gezeigt wurde, daß sie aus $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ableitbar sind. Es wird gezeigt, daß dann, unter dieser Voraussetzung, auch $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash C^k$ gilt. Da C^k Glied der Formelfolge $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist, gilt

$$C^k \text{ ist } \begin{cases} A_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } A_{n-1} & \text{eine Annahmeformel, aber nicht } A_n \\ A_n & \\ \text{A1 oder } \ldots \text{ oder A5} & \text{ein Axiom} \\ \text{aus } C^l \supset C^k \text{ und } C^l & \text{nach MP} \\ \text{aus } C^l & \text{nach Gen} \end{cases}$$

Für den Nachweis, daß $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^k$ müssen wieder alle Fälle durchgesehen werden. Die ersten drei unterscheiden sich nicht vom Induktionsanfang, so daß nun allein die Regelanwendungen betrachtet werden:

Sei C^k aus $C^l \supset C^k$ und C^l nach der Abtrennungsregel gewonnen. Dann haben diese Formeln einen kleineren Index als C^k und nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset (C^l \supset C^k) \quad \text{und} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^l$$

Dann ist die folgende Formelfolge die gesuchte Ableitung:

1. $A_n \supset (C^l \supset C^k)$ (ableitbar aus $A_1, \ldots, A_{n-1}$)
2. $A_n \supset C^l$ (ableitbar aus $A_1, \ldots, A_{n-1}$)
3. $A_n \supset (C^l \supset C^k) \supset (A_n \supset C^l \supset (A_n \supset C^k))$ (A2)
4. $A_n \supset C^k$ (2mal MP)

Sei C^k aus C^l mit Hilfe der Generalisierungsregel gewonnen. Dann hat letztere einen kleineren Index als C^k und nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset C^l$$

und C^k ist $\forall i C^l$ für irgendeine Variable i, die wegen der Beschränkung der Generalisierungsregel nicht in den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ vorkommt. Dann ist die folgende Formelfolge die gesuchte Ableitung:

1. $A_n \supset C^l$ (ableitbar aus $A_1, \ldots, A_{n-1}$)

2. $\forall i(A_n \supset C^l)$ (i kommt in $A_1, \ldots, A_{n-1}$ nicht vor)
3. $\forall i(A_n \supset C^l) \supset (A_n \supset \forall i C^l)$ (A5, i kommt in A_n nicht vor)
4. $A_n \supset C^k$ (MP)

Damit ist das Deduktionstheorem bewiesen.

Die Umkehrung des Deduktionstheorems, wenn $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ so $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, gilt offensichtlich wegen der Abtrennungsregel. Da die Ableitbarkeitsbeziehung transitiv[8] ist, ist eine Formel $A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$ genau dann beweisbar, wenn B aus $A_1, \ldots, A_n$ ableitbar ist. Anstelle von Beweisen können also bestimmte Ableitungen aus Annahmeformeln geführt werden.

1.3 Korrektheit

Warum sind die Axiome und Regeln so gewählt worden, wie sie weiter oben aufgeschrieben sind? Mit welcher Rechtfertigung behaupten wir, daß (prädikatenlogisches) Schließen gerade mit diesen Axiomen und Regeln zu geschehen hat? Die Axiome und Regeln der Prädikatenlogik garantieren, daß Schließen aus wahren Aussagen wieder auf wahre Aussagen führt: Wird in den deduktiven Mechanismus ein Satz wahrer Voraussetzungen eingespeist, dann kann man sich auf die Wahrheit der Resultate verlassen. Eine gültige Ableitungsregel der Form $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ besagt selbstverständlich nicht, daß die Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ (gemeinsam) wahr seien, oder daß B wahr wäre. Daß die axiomatisch aufgebaute Prädikatenlogik in diesem Sinne *korrekt* ist, wird über einen Zusammenhang von Ableitbarkeit und Implikation gezeigt: Per Ableitbarkeit wird Gültigkeit in einem Modell übertragen.

Zunächst aber wird die Ableitbarkeit aus einer endlichen Prämissenmenge auf eine ein beliebige Menge von Prämissen verallgemeinert:

Definition 12
$\mathbf{K} \vdash A$ *genau dann, wenn es eine Menge von Aussagen* $A_1 \in \mathbf{K}, \ldots, A_n \in \mathbf{K}$ *so gibt, daß* $A_1, \ldots, A_n \vdash A$.

[8] Das Deduktionstheorem kann mehrfach nacheinander angewendet werden, solange Annahmeformeln vorhanden sind. Wegen der Transitivität gilt beispielsweise: Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ und wenn $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \supset B$ so $A_1, \ldots, A_{n-2} \vdash A_{n-1} \supset (A_n \supset B)$; also gilt wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, so $A_1, \ldots, A_{n-2} \vdash A_{n-1} \supset (A_n \supset B)$ – und dies setze man fort.

Ableitbarkeit aus einer beliebigen Menge heißt also nichts anderes, als Ableitbarkeit aus einer endlichen Untermenge.

Definition 13
Ein deduktives logisches System heißt korrekt bezüglich einer Semantik, wenn für beliebige Satzmengen $\mathbf{K}$ *und eine beliebige Aussage* A *gilt:*

$$\textit{Wenn } \mathbf{K} \vdash A, \textit{ dann } \mathbf{K} \models A$$

Satz 8
Der vorgestellte axiomatische Aufbau der Prädikatenlogik ist korrekt bezüglich der angegebenen Semantik.

Da bereits gezeigt wurde, daß jedes Theorem Tautologie ist, kann eine einfache Beweisvariante gewählt werden:

Beweis Sei $\mathbf{K} \vdash A$, dann gibt es nach der Definition 12 einer Ableitung aus einer Menge eine endliche Untermenge von Annahmen, aus denen A ableitbar ist:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

Nach dem Deduktionstheorem 7 ist die Formel

$$A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset A) \ldots))$$

ein Theorem. Nach dem Satz 6 ist diese Formel auch allgemeingültig, das heißt, erfüllt in jedem Modell bei jeder Belegung:

$$\mathcal{M} \models A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset A) \ldots)) \text{ für jedes } \mathcal{M}$$

Nach der Definition der Subjunktion in Definition 5 heißt dies

$$\mathcal{M} \not\models A_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } \mathcal{M} \not\models A_n \text{ oder } \mathcal{M} \models A \text{ für jedes } \mathcal{M}$$

Für jedes Modell gilt also, wenn alle Prämissen im Modell gültig sind, dann auch die Schlußfolgerung:

$$\text{Für alle } \mathcal{M}, \text{ wenn } \mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_n, \text{ dann } \mathcal{M} \models A$$

Wenn $\mathcal{M}$ aber alle Aussagen aus $\mathbf{K}$ gültig werden läßt, dann auch $A_1, \ldots, A_n$ – also:

$$\text{Wenn } \mathcal{M} \models \mathbf{K}, \text{ dann } \mathcal{M} \models A$$

und dies ist die Definition der Implikation:

$$\mathbf{K} \models A$$

1.4 Konsistenz und ω-Vollständigkeit

1.4.1 Die Begriffe

Konsistenz heißt Widerspruchsfreiheit: Eine Menge heißt konsistent, wenn man keinen Widerspruch aus ihr ableiten kann. Eine maximal konsistente Menge ist im angegebenen Sinne widerspruchsfrei und enthält außerdem alle Formeln, die man unter Beibehaltung der Widerspruchsfreiheit zu der Menge hinzufügen kann. Konsistente Mengen können, wie gleich gezeigt werden wird, „maximalisiert“ werden.

Definition 14
Eine Menge $\mathbf{K}$ *von Formeln heißt inkonsistent, wenn es eine Formel* A *so gibt, daß* $\mathbf{K} \vdash A$ *und* $\mathbf{K} \vdash \sim A$*.*

$\mathbf{K}$ *ist konsistent, wenn* $\mathbf{K}$ *nicht inkonsistent ist.*

Eine Formel A *heißt konsistent (inkonsistent) mit einer Formelmenge* $\mathbf{K}$*, wenn die Menge* $\mathbf{K} \cup \{A\}$ *konsistent (inkonsistent) ist.*

Eine Formelmenge $\mathbf{K}$ *heißt maximal konsistent, wenn* $\mathbf{K}$ *konsistent ist und keine Formel konsistent mit* $\mathbf{K}$ *ist, die nicht Element von* $\mathbf{K}$ *ist.*

Mit dem Begriff der ω-Vollständigkeit versucht man ein Problem zu fassen, welches in der Philosophie der Mathematik eine große Rolle gespielt hat. Oben, auf Seite 8, wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Allquantor auf alle Objekte des Gegenstandsbereiches Bezug nimmt – unabhängig davon, ob sie benannt sind oder nicht. Für einen verneinten Allquantor kann man folgende semantische Regel erhalten:

$\mathcal{M}, \nu \models \sim\forall i A$ genau dann, wenn es eine Belegung ν_i so gibt, daß $\mathcal{M}, \nu_i \models \sim A$ (vgl. Definition 5).

Das heißt aber nicht, daß man in jedem Falle auch eine Aussage $A|\,^i_j$ mit einer Konstanten j hätte, für die gilt: $\mathcal{M}, \nu \models \sim A|\,^i_j$.

Das semantische Prinzip legt dies aber intuitiv nahe. Wenn die Allaussage nicht stimmt, kann man dann nicht ein Objekt auswählen und der freien Variablen so zuordnen, daß die Negation der Aussage im Wirkungsbereich des Quantors nicht erfüllt wird? Und kann man dann nicht sozusagen „rückwärts“ diesem Objekt eine Individuenkonstante (einen Namen) so zuordnen, daß deren Interpretation mit der Belegung der Variablen zusammenfällt? Es ist die Idee des Gegenbeispiels.

Beispiel 10
Nehmen wir an, nicht alle Ereignisse aus Beispiel 1 sind determiniert. Dann erwarten wir, daß man in der Menge der Ereignisse eines aufzeigen kann, daß nicht in die Menge der determinierten fällt. Kurz: Es gibt ein indeterminiertes Ereignis. Allerdings können wir unter Umständen kein Ereignis nennen, welches nicht determiniert ist – schlicht weil das indeterminierte Ereignis keinen Namen hat.

Man kann, generell, nicht. Die ω-Vollständigkeit fordert genau diese Gegenbeispiele. Jede negierte Allaussage in einer ω-vollständigen Menge wird in der Menge durch ein Gegenbeispiel begleitet.

Definition 15
Eine Formelmenge $\mathbf{K}$ *heißt ω-vollständig, wenn sie mit jeder Aussage $\sim\forall iA$ auch eine Aussage $\sim A|\,^i_j$ enthält.*

Da wir den Satz beweisen wollen, daß jede konsistente Menge erfüllbar ist, werden wir uns um folgende Zwischenschritte bemühen. Wir wollen zeigen, daß man jede konsistente Menge zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen Menge erweitern kann: Die entsprechenden Formeln werden einfach hinzugefügt. Dann wird für die erweiterte, konsistente und ω-vollständige Menge ein Modell angegeben, in dem diese erfüllt ist. Da alle Formeln der Ausgangsmenge unter denen der konsistenten und ω-vollständigen Menge sind, ist jedes Modell für letztere auch ein Modell für die Ausgangsmenge – sich ist also erfüllbar.

Im folgenden Beweis werden wir von Satzmengen ausgehen, das heißt, von Mengen von Aussagen ohne freie Vorkommen von Individuenvariablen. Aufgrund von Satz 3 können wir das: Haben wir in der Ausgangsmenge freie Vorkommen von Individuenvariablen, so ersetzen wir diese an allen Stellen durch neue Individuenkonstanten (wobei untereinander verschiedene Variablen durch verschiedene Konstanten ersetzt werden). Nach dem zitierten Satz ist die Ausgangsmenge erfüllbar, wenn die Substitutionsmenge erfüllbar ist und umgekehrt.

1.4.2 Das zentrale Lemma

Satz 9
Jede konsistente Menge läßt sich zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen Menge erweitern.

Dieser Satz besagt, daß man konsistente Mengen erweitern kann, indem man „passende" und „fehlende" Formeln hinzufügt. Die so erweiterten Formelmengen, wird gezeigt werden, besitzen einige nützliche Eigenschaften, so daß man anschließend für solche Formelmengen leicht ein Modell aufzeigen kann. Da die Ausgangsmenge in der maximal konsistenten und ω-vollständigen Menge enthalten ist, ist dieses Modell auch ein Modell der Ausgangsmenge. Das ist aber gerade der Punkt, der für den Vollständigkeitsbeweis gebraucht wird.

Der Satz wird bewiesen, indem zwei miteinander verwobene Prozeduren angegeben werden, mit denen parallel die zur Maximalität und die zur ω-Vollständigkeit fehlenden Formeln aufgefüllt werden. Der Beweis ist nicht konstruktiv, so ist insbesondere nicht klar, wie überprüft werden soll, ob eine Menge nach dem Hinzufügen einer bestimmten Formel noch konsistent ist oder nicht. Im Grunde geht es um folgende Idee:

Man numeriere alle Formeln, so daß man von der ersten, zweiten, usw. Formel sprechen kann.[9] Dann betrachte man die aufzufüllende Menge und alle Formeln nacheinander: Ist die Menge nach dem Hinzufügen der ersten, zweiten, usw. Formel noch konsistent, so wird die Formel hinzugefügt und mit der nächsten weitergemacht. Ist die Menge nicht konsistent, dann bleibt es bei der Menge, nichts ändert sich und man geht zur nächsten Formel über. Wenn man einmal „durch" ist (das ist eine Abstraktion, die über eine Vereinigung aller solcher Mengen realisiert wird), setzt der zweite Prozeß ein: Für jede einzelne negierte Allaussage in der Menge wird eine *neue* Konstante gefunden und ein „Gegenbeispiel" mit ihr zur Allaussage hinzugefügt. Nun ist durch die Spracherweiterung die Chance gegeben, auch andere Aussagen mit der neuen Individuenkonstanten zu bilden, und so werden nach Beendigung des Gegenbeispiel-Hinzufügens alle Aussagen wieder darauf überprüft, ob man sie konsistent zur – nun erweiterten – Menge hinzufügen kann. Der Ausgangsprozeß beginnt von Neuem, wird zu Ende geführt und neuerlich mit einem Anlaufen der zweiten Prozedur mit wiederum neuen Konstanten fortgesetzt ... und dies bis zum Schluß. Neben der Beschreibung der Prozeduren besteht die eigentliche Schwierigkeit nur darin, daß Konsistenz, Maximalität und ω-Vollständigkeit auch nachgewiesen werden müssen.

Wir definieren eine Reihe von Mengen $\mathbf{K}_n^m$ und $\mathbf{H}_n^m$ im Anschluß an eine konsistente Menge $\mathbf{K}$ und eine Ordnung von Aussagen $A_1, \ldots, A_n, \ldots$. Dabei gilt für die

[9] Die Formeln erhalten ihre Numerierung in einer Sprache, in der bereits alle im Prozeß benötigten Konstanten sind. Auf jeder Stufe der Prozedur werden aber allein die Formeln betrachtet, die mit den gerade zur Verfügung stehenden Konstanten gebildet werden können.

Mengen $\mathbf{H}_l^m$ und $\mathbf{H}_k^{m+1}$ und $\mathbf{K}_l^m$ und $\mathbf{K}_k^{m+1}$, daß in letzteren Aussagen mit allen Individuenkonstanten aus ersteren und einige mit weiteren vorkommen. Woher die Individuenkonstanten stammen, wird durch einen zweiten Index verdeutlicht: $j_{k,l}$ heißt: die k-te Konstante der l-ten Mengenschicht.

Definition 16

1. $\mathbf{K}_0^0 = \mathbf{K}$

2. $\mathbf{K}_{n+1}^m = \begin{cases} \mathbf{K}_n^m & \textit{falls } \mathbf{K}_n^m \cup \{A_n\} \textit{ inkonsistent ist} \\ \mathbf{K}_n^m \cup \{A\} & \textit{falls } \mathbf{K}_n^m \cup \{A_n\} \textit{ konsistent ist} \end{cases}$

3. $\mathbf{H}_n^0 = \bigcup \mathbf{K}_l^n$ *für alle* l

4. $\mathbf{H}_n^{m+1} = \begin{cases} \mathbf{H}_n^m & \textit{falls die m-te Formel von } \mathbf{H}_n^0 \textit{ nicht } {\sim}\forall iA \textit{ ist} \\ \mathbf{H}_n^m \cup A|_{j_{m,n}}^{\;i} & ansonsten \end{cases}$

5. $\mathbf{K}_0^{n+1} = \bigcup \mathbf{H}_n^l$ *für alle* l

6. $\mathbf{K}^\omega = \bigcup \mathbf{K}_k^l \cup \bigcup \mathbf{H}_n^m$ *für alle* l, k, m *und* n

Künftig werden die nach dieser Definition gebildeten Formelmengen einfach mit $\mathbf{K}_n^m$ bezeichnet, damit sind sowohl die nach der „Maximalitätsregel" (Punkt 2 der Definition) als auch die nach der „ω-Vollständigkeitsregel" (Punkt 4 der Definition) gebildeten Mengen gemeint. Wesentlich an dieser Definition ist, daß die Ausgangsmenge $\mathbf{K}$ in allen Mengen $\mathbf{K}_n^m$ enthalten ist und daß jede Menge $\mathbf{K}_n^m$ in den Mengen $\mathbf{K}_n^{m+1}$ und $\mathbf{K}_{n+1}^m$ ist.

Beispiel 11
Sei $\mathbf{K}$ die Menge $\{\forall xP(x), Q(b,a)\}$. Dies ist dann auch $\mathbf{K}_0^0$. Sei aufgrund der speziellen Numerierung die Formel $R(a)$ die erste zu überprüfende Formel. Es zeigt sich, daß $\mathbf{K}_0^0 \cup \{R(a)\}$ nicht inkonsistent ist, so ist dies (nämlich die Menge $\{\forall xP(x), Q(b,a), R(a)\}$) die Menge $\mathbf{K}_1^0$ und man betrachtet die nächste Formel. Dies sei – um des Beispieles Willen – die Formel ${\sim}Q(b,a)$. $\mathbf{K}_1^0 \cup \{{\sim}Q(b,a)\}$ ist inkonsistent und so ist $\mathbf{K}_2^0$ die Menge $\mathbf{K}_1^0$ (nämlich immer noch die Menge $\{\forall xP(x), Q(b,a), R(a)\}$). Dieser Prozeß wird fortgesetzt, solange noch Formeln zu überprüfen sind. Danach werden die Mengen $\mathbf{K}_i^0$ für alle i vereinigt und das Ergebnis ist $\mathbf{H}_0^0$. Nun werden alle Formeln daraufhin überprüft, ob sie die Form ${\sim}\forall iA$ haben. Die erste Formel hat diese Form nicht (das ist schließlich $R(a)$), also ist $\mathbf{H}_0^1 = \mathbf{H}_0^0$. Sei, wiederum um des Beispieles Willen, die dritte zu überprüfende

Formel die Formel $\sim\forall x(R(x) \wedge P(b))$. *Dann wird zur Formelmenge ein „Gegenbeispiel“ hinzugefügt:* $\mathbf{H}_0^3 = \mathbf{H}_0^2 \cup \{R(c_{3,1}) \wedge P(b)\}$. *Beachten Sie:* $\mathbf{H}_0^3$ *verrät mit dem oberen Index, daß die 3. Formel betrachtet wird,* $c_{3,1}$ *verrät, daß es sich um die dritte Konstante handelt, die zur 1. Mengenschicht (über der Ausgangsmenge) gehört. Dieser Prozeß wird fortgesetzt, solange Formeln zu überprüfen sind. Danach wird die Vereinigungsmenge über alle Formeln* $\mathbf{H}_0^i$ *gebildet und mit* K_0^1 *bezeichnet. In dieser Menge sind neue Formeln enthalten, da die Individuenkonstanten der ersten Schicht dazugekommen sind. Also beginnt der gesamte Prozeß von vorn, immer wieder ... bis schließlich alle gebildeten Mengen zu* $\mathbf{K}^\omega$ *vereinigt werden.*

Lemma 10
$\mathbf{K}^\omega$ *ist konsistent.*

Beweis Angenommen, K^ω ist nicht konsistent. Dann gibt es eine Folge von Aussagen $A^1, \ldots, A^n$ aus K^ω so, daß gilt $A^1, \ldots, A^n \vdash B$ und $A^1, \ldots, A^n \vdash \sim B$. Eine der Formeln $A^1, \ldots, A^n$ hat die höchste Nummer in der in Definition 16 vorausgesetzten Aufzählung der Formeln. Es gibt also eine Menge K_l^m so, daß alle Formeln aus $A^1, \ldots, A^n$ bereits in ihr enthalten sind und damit ist auch K_l^m bereits inkonsistent.

Die Menge K_l^m kann aufgrund der Schritte 2 oder 4 aus Definition 16 gebildet worden sein. Nach Schritt 2 kann sie nicht entstehen, denn es entstehen nur konsistente Mengen – entweder bleibt die Menge, wie sie ist (konsistent, da $\mathbf{K}$ konsistent ist), oder sie wird erweitert. Eine Erweiterung geschieht aber nur mit Formeln, die konsistent mit der Ausgangsmenge sind. Also kann K_l^m unter der Voraussetzung der Inkonsistenz von K^ω nur nach Schritt 4 entstehen. Dann kann vorausgesetzt werden, daß K_l^m durch Hinzufügen einer Formel $\sim A|\,_{j_{m,n}}^{\,i}$ aus K_l^{m-1} gewonnen wurde. Also gilt:

$K_l^{m-1} \cup \{\sim A|\,_{j_{m,n}}^{\,i}\} \vdash B$	
$K_l^{m-1} \cup \{\sim A|\,_{j_{m,n}}^{\,i}\} \vdash \sim B$	
$K_l^{m-1} \vdash \sim A|\,_{j_{m,n}}^{\,i} \supset B$	Deduktionstheorem
$K_l^{m-1} \vdash \sim A|\,_{j_{m,n}}^{\,i} \supset \sim B$	Deduktionstheorem
$K_l^{m-1} \vdash A|\,_{j_{m,n}}^{\,i}$	Prädikatenlogik
$K_l^{m-1} \vdash A(i_k)$	Umbenennung in eine neue Variable
$K_l^{m-1} \vdash \forall i_k A(i_k)$	Prädikatenlogik

In K_l^0 – und damit auch in K_l^{m-1} ist aber $\sim\forall i_k A(i_k)$ (besser gesagt, diese Formel mit einer anderen Variablen anstelle von i_k[10]), und so ist K_l^{m-1} inkonsistent.

Wir haben also:

1. Die Menge **K**, das ist K_0^0, ist konsistent.

2. Wenn eine Menge K_n^m konsistent ist, so sind auch K_n^{m+1} und K_{n+1}^m konsistent[11].

3. Da damit keine der Mengen K_n^m inkonsistent ist, kann auch K^ω nicht inkonsistent sein.

Lemma 11
K^ω ist maximal.

Beweis Wäre K^ω nicht maximal, gäbe es eine Formel A die konsistent mit dieser Menge aber nicht Element dieser Menge ist. Da A in der vorausgesetzten Aufzählung eine Nummer besitzt, gibt es eine Menge K_n^m, bezüglich der auf einem gewissen Schritt nach Punkt 2 von Definition 16 die Entscheidung gefallen ist, ob A hinzugefügt werden soll oder nicht. Da A konsistent mit K^ω ist, ist A auch konsistent mit K_n^m und also hinzugefügt worden. Dann ist A auch Element von K^ω.

Lemma 12
K^ω ist ω-vollständig.

Beweis Wäre K^ω nicht ω-vollständig, würde es eine negierte Allaussage ohne „Gegenbeispiel“ enthalten. Wie im Beweis oben kann argumentiert werden, daß die negierte Allaussage auf irgendeinem Schritt nach Punkt 4 von Definition 16 erscheint und die Aussage mit der neuen Konstanten hinzugefügt wird. Dann ist sie auch in K^ω.

[10]Reines Umbenennen von quantifizierten Variablen spielt für die Ableitbarkeitsbeziehungen keine Rolle.

[11]Genauer – es wurde die Kontraposition gezeigt

1.4.3 Eigenschaften maximal konsistenter und ω-vollständiger Mengen

An dieser Stelle soll der elegante Trick der Beweisführung auf informale Weise verraten werden: Die maximal konsistenten und ω-vollständigen Mengen sind so konstruiert, daß mit der Wahrheit der vorkommenden prädikativen Aussagen auch alle anderen Aussagen in der Menge wahr werden. Da sich die prädikativen Aussagen, die Prädikatformeln, aber nicht widersprechen, kann man ihnen eine gemeinsame Wahr-Interpretation zuschreiben – und damit ist plötzlich jede der Aussagen in der Menge wahr. Damit sind natürlich auch alle die Aussagen wahr, die Element der Menge sind, aus der die maximal konsistente und ω-vollständige Menge überhaupt gebildet wurde. Man hat also ganz praktisch gezeigt, daß die Aussagen einer konsistenten Menge alle gemeinsam wahr sein können, was durchaus auch intuitiv einleuchtend ist. Um dies alles aber zeigen zu können, benötigt man einige Eigenschaften, auf die dann weiter unter zurückzukommen ist.

Lemma 13
Sei $\mathbf{K}^\omega$ eine maximal konsistente und ω-vollständige Formelmenge.
Für jede Formel A gilt: $A \in \mathbf{K}^\omega$ oder $\sim A \in \mathbf{K}^\omega$ aber nicht beide.

Beweis A und $\sim A$ sind nicht beide in $\mathbf{K}^\omega$, denn wären sie es, so wäre $\mathbf{K}^\omega$ inkonsistent.

A und $\sim A$ sind nicht beide nicht in $\mathbf{K}^\omega$ wie aus folgender Überlegung folgt: In der für Definition 16 auf Seite 29 vorausgesetzten Numerierung der Formeln hat eine der beiden Formeln A oder $\sim A$ die höhere Nummer. Nennen wir diese A^2 und die andere A^1 (also entweder ist A^2 die Negation von A oder A^1 ist es und die jeweils andere ist A). Die Formel A^2 wird irgendwo im Prozeß nach Definition 16 daraufhin überprüft, ob sie konsistent mit der gerade vorliegenden Menge $\mathbf{K}_n^m$ ist – und verworfen (sonst wäre sie in $\mathbf{K}^\omega$). Da die Nummer von A^1 kleiner ist als die von A^2, ist A^1 bereits verworfen worden. Es gilt also:

$\mathbf{K}_n^m \cup \{A^2\}$ – inkonsistent	weil sonst nicht verworfen
es gibt ein B so, daß:	wegen Inkonsistenz
$\quad \mathbf{K}_n^m \cup \{A^2\} \vdash B$	
$\quad \mathbf{K}_n^m \cup \{A^2\} \vdash \sim B$	
$\mathbf{K}_n^m \vdash \sim A^2$	Deduktionstheorem, Aussagenlogik

Nun ist aber – weil früher überprüft und auf dieser früheren Stufe bereits wegen Inkonsistenz verworfen – auch A^1 inkonsistent mit $\mathbf{K}_n^m$, also gilt mit derselben Argumentation auch $\mathbf{K}_n^m \vdash {\sim}A^1$. Da eine der beiden Formeln A^1 und A^2 die Negation der anderen ist, gilt das auch für deren Negationen und $\mathbf{K}_n^m$ ist inkonsistent. Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 14
Eine Formel $A \supset B$ ist genau dann Element einer maximal konsistenten ω-vollständigen Menge, wenn A nicht Element oder B Element dieser Menge ist.

Beweis Angenommen, $A \supset B$ ist Element einer maximal konsistenten ω-vollständigen Menge $\mathbf{K}$. Angenommen weiterhin, daß A Element von $\mathbf{K}$ und B nicht Element von $\mathbf{K}$ ist. Dann ist ${\sim}B \in \mathbf{K}$ (wegen Satz 13) und damit aus $\mathbf{K}$ ableitbar. Mit $A \supset B$ und A ist aber auch B aus $\mathbf{K}$ ableitbar, damit wäre die Menge inkonsistent, was der Annahme widerspricht.

Angenommen, A ist nicht Element oder B ist Element einer maximal konsistenten ω-vollständigen Menge $\mathbf{K}$. Angenommen weiterhin, daß $A \supset B$ nicht Element von $\mathbf{K}$ ist. Dann ist ${\sim}(A \supset B) \in \mathbf{K}$ (wegen Satz 13) und damit aus $\mathbf{K}$ ableitbar. Es werden zwei Fälle unterschieden: Ist $A \notin \mathbf{K}$, so ist ${\sim}A \in \mathbf{K}$ (wegen Satz 13) und damit aus $\mathbf{K}$ ableitbar. Dann ist auch $A \supset B$ wegen ${\sim}A \supset (A \supset B)$ ableitbar und $\mathbf{K}$ ist inkonsistent. Ist aber $B \in \mathbf{K}$, so ist $A \supset B$ wegen $B \supset (A \supset B)$ ableitbar und $\mathbf{K}$ ist inkonsistent. In jedem Falle ist $\mathbf{K}$ inkonsistent, was der Annahme widerspricht.

Lemma 15
Eine Aussage $\forall iA$ ist genau Element einer maximal konsistenten ω-vollständigen Menge $\mathbf{K}$, wenn $A|{}^{i}_{j_{m,n}}$ für alle Individuenkonstanten $j_{m,n}$ Element von $\mathbf{K}$ ist.

Beweis Angenommen, $\forall iA$ ist Element von $\mathbf{K}$ und irgendein $A|{}^{i}_{j_{m,n}}$ für ein $j_{m,n}$ ist es nicht. Dann ist ${\sim}A|{}^{i}_{j_{m,n}} \in \mathbf{K}$ wegen Satz 13 und ableitbar, und $A|{}^{i}_{j_{m,n}}$ ist ableitbar wegen $\forall iA \supset A|{}^{i}_{j_{m,n}}$. Dann ist $\mathbf{K}$ inkonsistent, was der Annahme widerspricht.

Angenommen, $\forall iA$ ist nicht Element von $\mathbf{K}$ und alle $A|{}^{i}_{j_{m,n}}$ für alle $j_{m,n}$ sind es. Dann sind alle $A|{}^{i}_{j_{m,n}}$ ableitbar. Da $\forall iA$ nicht Element von $\mathbf{K}$ ist, ist ${\sim}\forall iA \in \mathbf{K}$ und damit gibt es wegen der Art, wie die Mengen $\mathbf{K}_n^m$ definiert sind, eine Stelle, an der für die negierte Allaussage ein Gegenbeispiel zur Menge hinzugefügt wurde.

Diese Aussage der Form $\sim A|\,^{i}_{j_{m,n}}$ ist Element von $\mathbf{K}$ und daher ableitbar. Dann ist $\mathbf{K}$ inkonsistent, was der Annahme widerspricht.

1.5 Vollständigkeit

Maximal konsistente und ω-vollständige Mengen enthalten also niemals eine Formel mit ihrer Negation, aber eine von beiden, mit einer Subjunktion und dem Vorderglied auch deren Hinterglied und wenn die Subjunktion nicht in der Menge ist, dann sind Vorderglied und negiertes Hinterglied Element. Außerdem gehört in eine solche Menge zu einer negierten Allaussage auch immer ein Gegenbeispiel – und die Allaussage wird durch kein Gegenbeispiel widerlegt werden können. Selbstverständlich muß eine solche Menge nicht erfüllt sein, aber nichts spricht dagegen, daß sie erfüllbar ist: Es ist nicht ausgeschlossen, daß alle Aussagen gemeinsam durch ein Modell mit einer Belegung erfüllt werden. Für den Nachweis der Erfüllbarkeit reicht es, ein konkretes Modell anzugeben: Gegenstandsbereich und Interpretation sind anzugeben. Wir benötigen keine Belegung, denn wir betrachten allein Satzmengen (ohne freie Variablen)[12].

1.5.1 Das Modell

Satz 16
Jede maximal konsistente ω-vollständige Menge hat ein Modell.

Man kann sich die vorkommenden Individuenkonstanten als durchnumeriert vorstellen: Alle haben einen doppelten Index m, n (einen für die Schicht entsprechend dem Durchlauf nach Punkt 4 von Definition 16, einen für die Nummer in der Schicht) und Paare von Zahlen kann man entlang der natürlichen Zahlen eineindeutig zuordnen[13].

Sei $\overline{\mathbf{K}}$ eine maximal konsistente und ω-vollständige Menge. Dann betrachten wir ein Modell $\langle \mathbb{D}, \mathcal{I} \rangle$ für $\overline{\mathbf{K}}$, das folgendermaßen bestimmt ist:

Definition 17

1. *$\mathbb{D}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.*

[12] Die Sätze 3 und 1 rechtfertigen dies.
[13] Eine Möglichkeit ist die Funktion $\frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2 + 3m + n)$.

2. (a) *Für alle Individuenkonstanten* $j_{m,n}$ *ist* $\mathcal{I}(j_{m,n})$ *die durch die erwähnte Numerierung der Konstanten festgelegte Zahl.*

   (b) *Für alle prädikativen Aussagen* $f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots j_{m_k,n_k})$ *ist* $\mathcal{I}(f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots j_{m_k,n_k}))$ *genau dann erfüllt, wenn* $f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots j_{m_k,n_k}) \in \overline{\mathbf{K}}$.

Zum besseren Verständnis des Modells mache man sich klar, daß nun alle Prädikate als Eigenschaften und Relationen von natürlichen Zahlen interpretiert sind, alle namensartigen Ausdrücke Bezeichnungen natürlicher Zahlen sind. Ein Prädikat trifft auf ein entsprechendes Zahlentupel zu, wenn die entsprechende Aussage in der maximal konsistenten und ω-vollständigen Satzmenge enthalten ist – ansonsten nicht. Das heißt, die und nur die einfachen (prädikativen) Aussagen sind im Modell erfüllt, die in der Satzmenge vorkommen. Das funktioniert, weil:

1. Wir betrachten keine Aussagen mit freien Vorkommen von Individuenvariablen. Falls diese erfüllbar sind, gibt es auch für das Resultat der Substitution der freien Vorkommen durch Individuenkonstanten ein Modell (vgl. Satz 3).

2. Mit der Bedingung

   $\mathcal{I}(f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots, j_{m_k,n_k}))$ ist genau dann erfüllt, wenn
   $f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots, j_{m_k,n_k}) \in \overline{\mathbf{K}}$

   ist die Interpretation aller Prädikate genau festgelegt: $\langle d_{i_1}, \ldots, d_{i_n} \rangle \in \mathcal{I}(f^n)$ genau dann, wenn es Individuenkonstanten $j_{m_1,k_1}, \ldots, j_{m_n,k_n}$ so gibt, daß $\mathcal{I}(j_{m_1,k_1}) = d_{i_1}, \ldots, \mathcal{I}(j_{m_n,k_n} = d_{i_n})$ und $f^k(j_{m_1,n_1}, \ldots, j_{m_k,n_k}) \in \overline{\mathbf{K}}$.

Sei $\mathcal{M}$ nun das eben in Definition 17 beschriebene Modell $\langle \mathbb{D}, \mathcal{I} \rangle$. Um zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ ein Modell für für die maximal konsistente und ω-vollständige Menge $\overline{\mathbf{K}}$ ist, muß gezeigt werden, daß dieses Modell alle Formeln aus $\overline{\mathbf{K}}$ erfüllt. Es muß also nachgewiesen werden, daß gilt: *Wenn* $A \in \overline{\mathbf{K}}$ *– und nur dann – gilt* $\mathcal{M} \models A$. Dies geschieht in zwei Schritten: Der Satz gilt für atomare Formeln, und für jede komplexe Formel gilt der Satz, wenn er für ihre entsprechenden Konstituenten gilt. Der nun folgende Beweis ist also eine Induktion über den Formelaufbau.

Beweis (Satz 16 bezüglich des Modells 17)
Induktionsanfang: Jede atomare Aussage ist genau dann im Modell $\mathcal{M}$ erfüllt, wenn sie Element der Menge $\overline{\mathbf{K}}$ ist, weil die Definition 17 des Modells $\mathcal{M}$ dies so festlegt.

Induktionsschritt: Angenommen, Satz 16 gilt für alle Aussagen der Art A, B, $A|\,^i_j$ (mit i und j als frei vorkommender Individuenvariable und Individuenkonstante entsprechend) *(Induktionsvoraussetzung IVor)*, dann gilt er auch für $\sim A$, $A \supset B$ und $\forall iA$.

Betrachten wir die Fälle einzeln:

1. Sei die komplexe Formel eine Negation $\sim A$.
   Angenommen, $\mathcal{M} \models \sim A$
   dann $\mathcal{M} \not\models A$ (wegen Def. der Neg.)
   dann $A \notin \overline{\mathbf{K}}$ (wegen IVor)
   dann $\sim A \in \overline{\mathbf{K}}$ (wegen Lemma 13).

   Angenommen $\mathcal{M} \not\models \sim A$
   dann $\mathcal{M} \models A$ (wegen Def. der Neg.)
   dann $A \in \overline{\mathbf{K}}$ (wegen IVor)
   dann $\sim A \notin \overline{\mathbf{K}}$ (wegen Lemma 13).

2. Sei die komplexe Formel eine Subjunktion $A \supset B$.
   Angenommen, $\mathcal{M} \models A \supset B$
   dann $\mathcal{M} \not\models A$ oder $\mathcal{M} \models B$ (wegen Def. der Subj.)
   dann $A \notin \overline{\mathbf{K}}$ oder $B \in \overline{\mathbf{K}}$ (wegen IVor)
   dann $A \supset B \in \overline{\mathbf{K}}$ wegen Lemma 14.

   Angenommen, $\mathcal{M} \not\models A \supset B$
   dann $\mathcal{M} \models A$ und $\mathcal{M} \not\models B$ (wegen Def. der Subj.)
   dann $A \in \overline{\mathbf{K}}$ und $B \notin \overline{\mathbf{K}}$ (wegen IVor)
   dann $A \supset B \notin \overline{\mathbf{K}}$ wegen Lemma 14.

3. Sei die komplexe Formel eine Generalisierung $\forall iA$.
   Angenommen, $\mathcal{M} \models \forall iA$
   dann $\mathcal{M} \models A|\,^i_j$ für alle Individuenkonstanten j (wegen Def. des Allqu.)
   dann $A|\,^i_j \in \overline{\mathbf{K}}$ für alle Individuenkonstanten j (wegen IVor)
   dann $\forall iA \in \overline{\mathbf{K}}$ (wegen Lemma 15)

   Angenommen, $\forall iA \in \overline{\mathbf{K}}$
   dann $A|\,^i_j \in \overline{\mathbf{K}}$ für alle Individuenkonstanten j (wegen Lemma 15)
   dann $\mathcal{M} \models A|\,^i_j$ für alle Individuenkonstanten j (wegen IVor)
   dann $\mathcal{M} \models \forall iA$ (siehe Kommentar)

Kommentar: Würde $\mathcal{M} \models \forall iA$ nicht gelten, würde $\mathcal{M}, \nu_i \not\models A$ für mindestens ein ν_i gelten. Da $\nu_i(i)$ eine Zahl ist (ein Element aus dem Individuenbereich), diese aber einen Namen hat, gälte $\nu_i(i) = \mathcal{I}(j)$ für eine Individuenkonstante j. Das würde $\mathcal{M} \models A|\,^i_j$ widersprechen.

1.5.2 Der Beweis der Vollständigkeit

Gerade eben wurde gezeigt, daß jede maximal konsistente ω-vollständige Menge ein Modell hat. Dies erlaubt es zu beweisen, daß gilt:

Satz 17
Eine Menge ist genau dann konsistent, wenn sie ein Modell hat.

Beweis Sei die Menge inkonsistent, dann sind Formeln A und $\sim A$ ableitbar. Dann impliziert die Menge diese Formeln auch wegen der Korrektheit, damit würde jedes Modell der Menge auch die beiden Formeln A und $\sim A$ erfüllen. So ein Modell gibt es aber nicht.

Sei die Menge konsistent, dann ist sie nach Satz 9 zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen Menge erweiterbar, die die Ausgangsmenge ja enthält. Nach Satz 16 hat letztere ein Modell. Dieses Modell erfüllt auch jede Aussage der Ausgangsmenge und ist damit auch Modell für diese.

Satz 18 *Wenn* $\mathbf{K} \models A$*, dann* $\mathbf{K} \vdash A$.

Beweis Sei $\mathbf{K} \models A$,
dann ist $\mathbf{K} \bigcup \{\sim A\}$ nicht erfüllbar,
hat also kein Modell
dann ist $\mathbf{K} \bigcup \{\sim A\}$ inkonsistent nach Satz 17
dann gibt es eine Formel B so, daß $\mathbf{K} \bigcup \{\sim A\} \vdash B$ und $\mathbf{K} \bigcup \{\sim A\} \vdash \sim B$
dann gilt $\mathbf{K} \vdash \sim A \supset B$ und $\mathbf{K} \vdash \sim A \supset \sim B$
und damit $\mathbf{K} \vdash A$.

Die Prädikatenlogik erster Stufe ist korrekt und (stark) vollständig, Implikation und Ableitbarkeit dürfen identifiziert werden.

1.6 Die Folgen

Bewiesen wurde der sogenannte Adäquatheitssatz

$$\mathbf{K} \models A \Longleftrightarrow \mathbf{K} \vdash A$$

und er führt zu einigen auch philosophisch interessanten Weiterungen. Zunächst betrachten wir den Fall, daß die Menge $\mathbf{K}$ leer ist. In diesem Fall ist die Ableitung ein Beweis und die Implikation wird zur Behauptung, daß A in jedem Modell erfüllt (tautologisch) ist:

Satz 19
$\models A \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash A.$

Beweisbarkeit und (logische) Wahrheit fallen also für die Prädikatenlogik (erster Stufe) zusammen. Der Adäquatheitssatz besagt in einer „philosophischeren“ Sprache, daß alle regelkonformen Schlüsse wahrheitserhaltend sind und daß jeder wahrheitserhaltende Schluß regelgerecht ist.

Angenommen, eine Formelmenge hat ein Modell, dann ist sie konsistent. Eine konsistente Formelmenge aber hat nach dem eben bewiesenen Theorem ein *abzählbar* großes Modell – eines mit der Menge der natürlichen Zahlen als Trägermenge.

Satz 20 ***(Löwenheim/Skolem)***
Jede Menge mit einem Modell (jede konsistente Menge) hat auch ein abzählbar großes Modell.

Formelmengen interessieren uns nicht nur abstrakt, außerhalb der Logik ist man im allgemeinen an speziellen Formelmengen interessiert – denen beispielsweise, die wahre Aussagen über die natürlichen oder die reellen Zahlen, über Gruppen oder über Genkombinationen, über Elementarteilchen oder über Kauf- und Verkaufstrategien an Börsen ausdrücken. Es ist sinnvoll anzunehmen, daß hier die intendierte Interpretation jeweils die ist, die natürliche Zahlen, Gene, Elementarteilchen oder Börsenhandlungen im Gegenstandsbereich haben und deren Eigenschaften entsprechend Eigenschaften von Gegenständen dieser Art sind. Manche solcher Theorien haben also eine intendierte Interpretation auf einem überabzählbaren Gegenstandsbereich, wie die Theorie der reellen Zahlen. Nichts desto trotz haben auch diese Theorien, so sie konsistent sind, ein Modell in einem abzählbaren Bereich!

Für Ableitungen aus einer Menge ist – nach Definition 12 – klar, daß jede Ableitbarkeit aus einer Menge eine Ableitung aus einer endlichen (Unter-) Menge voraussetzt. Für Implikationen ist das nicht offensichtlich. Satz 18 erlaubt ein paralleles Resultat für Implikationen:

Satz 21 ***(Kompaktheit)***
Wenn $\mathbf{K} \models A$*, dann gibt es Formeln* $A_1, \ldots, A_n$ *so, daß* $A_i \in \mathbf{K}$ *für alle* $1 \leq i \leq n$ *und* $A_1, \ldots, A_n \models A$.

Folgerung: *Eine Menge hat genau dann ein Modell, wenn jede ihrer endlichen Untermengen ein Modell hat.*

Beweis Angenommen, $\mathbf{K} \models A$ für ein $\mathbf{K}$ und ein A. Dann gilt auch $\mathbf{K} \vdash A$ und damit $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ für endlich viele Formeln A_i aus $\mathbf{K}$. Damit gilt nach der Vollständigkeit auch $A_1, \ldots, A_n \models A$.

(Für die Folgerung) Wenn eine Menge ein Modell hat, so hat jede Untermenge offensichtlich ein (nämlich dieses) Modell.

Angenommen, eine Menge $\mathbf{K}$ hat kein Modell. Dann gilt für irgendeine Formel $A \in \mathbf{K}$: $\mathbf{K}\backslash\{A\} \models {\sim}A$ (schließlich gibt es entweder kein Modell für $\mathbf{K}\backslash\{A\}$ oder das Modell macht A unerfüllt). Nach der Kompaktheit gibt es eine endliche Untermenge $\mathbf{K}'$ von $\mathbf{K}\backslash\{A\}$ so, daß $\mathbf{K}' \models {\sim}A$. Die Menge $\mathbf{K}' \cup \{A\}$ ist dann endlich, eine Untermenge von $\mathbf{K}$ und hat kein Modell.[14]

Die Kompaktheit einer Logik spielt in „negativer“ Hinsicht eine große Rolle: Theorien sind in der Regel unendliche Satzmengen. Für die Inkonsistenz einer Theorie ist es mit dem Kompaktheitssatz ausreichend zu zeigen, daß eine endliche Untermenge der Theorie kein Modell hat – und dies ist meist leichter zu zeigen, als das Fehlen eines Modells für die Theorie im ganzen.

[14]Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß der Kompaktheitssatz und seine Folgerung äquivalent sind, hat man die Folgerung bewiesen, folgt auch die Kompaktheit.

Kapitel 2

Variationen

2.1 Das natürliche Schließen

Mit der Prädikatenlogik sind zwei Formelklassen charakterisiert worden: die der aus der leeren Menge ableitbaren Formeln (der Theoreme) und die der Formeln, die in jedem Modell gültig sind (die der Tautologien). Die Formelklassen fallen zusammen, ein und dieselbe Klasse von Formeln wurde also auf verschiedene Weise aus der Menge aller Formeln herausgegriffen. Die Formeln sind logisch wahr, dafür aber auch uninformativ.[1] Wenn vorhandenes Wissen systematisiert werden soll, interessiert gerade nicht, welche Sätze unter beliebigen Interpretationen der vorkommenden nichtlogischen Termini gelten. Theorien sind, aus der Sicht der Logik, Satzmengen, und Theoriebildung kann dann aus zwei Perspektiven betrachtet werden: Aus welchen inhaltlichen Axiomen können die Sätze der Theorie hergeleitet werden? Wie kann man die Modelle charakterisieren, in denen alle Sätze wahr sind?

[1] Der hier verwendete Begriff „uninformativ" kann korrekt gefaßt werden. Nimmt man an, daß man über das Erwerben von Informationen Alternativen einschränken kann, dann sind logisch wahre Aussagen uninformativ, da man keine bereits vorliegende Möglichkeit ausschließen kann. Eine Aussage wie „Sokrates ist weise" erlaubt es dagegen, alle möglicherweise vorliegenden Alternativen auszuschließen, in denen Sokrates nicht weise ist. Dieses Verständnis von Information ist von Carnap und Bar-Hillel ausgearbeitet worden.

2.1.1 Erweiterungen der Prädikatenlogik

Post-Vollständigkeit

Kann man eine Logik eigentlich um weitere logische Axiome erweitern? Wie soll man diese Frage überhaupt verstehen? Das vorgestellte System ist korrekt und vollständig. Fragen wir nach den Formeln, die aus bestimmten anderen Formeln abgeleitet werden können, dann werden diese auch von jenen impliziert.

Die Aussagenlogik ist *Post-vollständig*, das heißt, daß das Hinzufügen einer Formel, die kein aussagenlogisches Theorem ist, als Axiom zu einer Axiomatik der Aussagenlogik, diese widersprüchlich werden läßt. Was diese Eigenschaft besagt, macht man sich am besten klar, indem man die Axiome und die Theoreme eines Systems getrennt betrachtet:

Nehmen wir an, zu einer Menge von Axiomen der Aussagenlogik $\mathbf{K}^A$ wird eine nichtbeweisbare aussagenlogische Formel A_i, die nicht kontradiktorisch ist, hinzugefügt. Dann ist die entstehende Menge $\mathbf{K}^A \cup \{A_i\}$ erfüllbar – und zwar in all jenen Modellen erfüllt, in denen auch A_i erfüllt ist (daß die Axiome in allen Modellen erfüllt sind, haben wir bereits gesehen). Betrachten wir jedoch die Menge der aussagenlogischen Konsequenzen aus $\mathbf{K}^A \cup \{A_i\}$, das heißt die Menge aller Formeln B so, daß sie beweisbar im axiomatischen System $\mathbf{K}^A \cup \{A_i\}$ mit Hilfe der Standard-Schlußregeln sind, so ist diese Menge inkonsistent, hat kein Modell.[2]

In diesem Sinne ist die Aussagenlogik sowohl arm als auch komplett – man kann mir ihr allein verhältnismäßig wenig anfangen. Allerdings kann man den Bestand an Axiomen auch nicht erweitern, selbst wenn man bereit wäre, dafür weniger Modelle zu betrachten. Die Prädikatenlogik kann man durch zusätzliche Axiome erweitern, sie ist also nicht Post-vollständig. Formeln, die man zur Axiomatik der Prädikatenlogik als Axiom hinzufügen kann, werden weiter unten angegeben. Zunächst wird die Sprache der Prädikatenlogik durch zusätzliche, definierbare Operatoren erweitert, die allein der Bequemlichkeit der Darstellung

[2] Warum das so ist, ist nicht schwierig einzusehen. Die Einsetzungsregel ist eine gültige Beweisregel in der Aussagenlogik, für atomare Aussagen dürfen in Theoremen an allen Stellen ihres Vorkommens beliebige Aussagen eingesetzt werden. Für logisch indeterminierte Formeln lassen sich stets Einsetzungen so finden, daß die resultierende Formel eine Kontradiktion ist. Dazu betrachtet man eine Belegung der vorkommenden Variablen mit Wahrheitswerten, für die die Formel falsch ist und „fixiert" sie: Wenn die Belegung einer Aussagenvariablen den Wert wahr zuschreibt, wird für sie eine Tautologie eingesetzt, ansonsten eine Kontradiktion. Negationen von Kontradiktionen sind Tautologien, also Theoreme, und so ist das System widersprüchlich: Das Resultat der Einsetzung und seine Negation sind beweisbar.

dienen. Danach wird eine Relation, die Identität, axiomatisch eingeführt – dies ist eine echte Erweiterung der Ausdrucksmöglichkeiten der Prädikatenlogik. Mit Hilfe der Prädikatenlogik mit Identität lassen sich sodann formale Theorien aufbauen, logische Systeme, die auf bestimmte Weise interpretiert werden sollen, um ein (inhaltliches) Wissensgebiet zu charakterisieren. Genau an dieser Stelle wird die Logik von einem reinen Schlußwerkzeug, einer Theorie, in der die gültigen Herleitungsverfahren möglichst umfassend systematisiert sind, zu einem Repräsentationswerkzeug, einem Mittel, sachliche Zusammenhänge korrekt darzustellen.

2.1.2 Prädikatenlogik mit weiteren logischen Konstanten

Die aussagenlogischen Operatoren, der Existenzquantor

Wir erweitern die Sprache der Prädikatenlogik zunächst um einen Satz an aussagenlogischen Operatoren und einen zusätzlichen Quantor:

Definition 18
Wenn A und B prädikatenlogische Formeln sind, so sind $(A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B)$ prädikatenlogische Formeln.

Wenn A prädikatenlogische Formel ist und i eine Individuenvariable, so ist $\exists i A$ eine prädikatenlogische Formel.

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &=_{\texttt{dfn}} {\sim}(A \supset {\sim}B) \\
A \vee B &=_{\texttt{dfn}} {\sim}A \supset B \\
A \equiv B &=_{\texttt{dfn}} {\sim}(({\sim}A \supset B) \supset {\sim}({\sim}B \supset A)) \\
\exists i A &=_{\texttt{dfn}} {\sim}\forall i {\sim}A
\end{aligned}
$$

Grundsätzlich werden durch diese definitorischen Erweiterungen die Ausdrucksmöglichkeiten der bisher verwendeten Sprache nicht verändert – alles, was mit Hilfe der neuen Zeichen gesagt werden kann, kann auch ohne sie gesagt werden. Genauer gesagt handelt es sich um gar keine echte Erweiterung der Ausgangssprache mit Bezug auf Beweistheorie und Semantik: Es gibt keine Formel in der erweiterten Sprache, die Theorem oder Tautologie wäre und deren Rückübersetzung kein Theorem oder keine Tautologie in der Ausgangssprache wäre.

Solche Übersetzungstechniken erlauben es, manchmal deduktive Systeme oder Semantiken zu vergleichen, die in verschiedenen Sprachen formuliert sind. Wir nennen Systeme *deduktiv äquivalent*, wenn sich die jeweiligen Übersetzungen der Theoreme eines Systems als Theoreme im anderen nachweisen lassen. Alle adäquaten Formulierungen der Prädikatenlogik sind untereinander deduktiv äquivalent – insofern sie alle genau die Menge der Tautologien beweisen, beweisen sie alle genau die gleiche Menge von Formeln in möglicherweise verschiedenen Sprachen.

Die Definition der Operatoren Konjunktion, Adjunktion, Bisubjunktion und des Existenzquantors erlauben es, Formeln intuitiver, näher an der Umgangssprache zu schreiben.

Beispiel 12

Beweisbare Formel	*neue Schreibweise*
$\sim(A \supset \sim B) \supset A$	$(A \wedge B) \supset A$
$\sim(A \supset \sim B) \supset B$	$(A \wedge B) \supset B$
$A \supset (\sim A \supset B)$	$A \supset (A \vee B)$
$\sim\forall x\sim\sim(P(x) \supset \sim Q(x)) \supset$	$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset (\exists P(x) \vee \exists x Q(x))$
$\supset (\sim\sim\forall x \sim P(x) \supset \sim\forall x \sim Q(x))$	

Die gewonnene Klarheit und Übersichtlichkeit ist schwerlich zu bestreiten.

Die semantische Regel für die Adjunktion wurde bereits im Beispiel 5 angegeben, aus den Definitionen lassen sich die Regeln für die anderen neuen Zeichen leicht ablesen. Für den Existenzquantor $\exists$ gilt beispielsweise folgende Regel:

$\mathcal{M}, \nu \models \exists i A$ *genau dann, wenn es eine Belegung* ν_i*, die sich von der Belegung* ν *höchstens im Wert für die Individuenvariable* i *unterscheidet, so gibt, daß* $\mathcal{M}, \nu_i \models A$*.*

Verschiedene Aufbauten der Logik nutzen nicht nur unterschiedliche Sätze an Grundoperatoren und führen unterschiedliche Sätze an definierten Operatoren ein, diese werden häufig auch unterschiedlich notiert. *Daß* verschiedene Sätze an Grundoperatoren verwendet werden ist offenbar solange kein Problem, solange mit Hilfe der in der Sprache vorhandenen Operatoren alle prädikatenlogischen Ausdrücke formuliert werden können. Das wird dadurch garantiert, daß für den jeweiligen Satz an *aussagenverknüpfenden* Operatoren bewiesen wird, daß mit ihrer Hilfe jede n-stellige Funktion von Wahrheitswerten in $\{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$ definierbar ist. Die betreffende Eigenschaft von Systemen von Grundoperatoren heißt *funktionale Vollständigkeit*. Zu diesen Operatoren wird einer der beiden oder beide Quantoren hinzugefügt. Ohne Beweis sind hier einige Tatsachen über funktionale Vollständigkeit aufgelistet:

> Die Systeme $\langle\sim, \supset\rangle$, $\langle\sim, \wedge\rangle$, $\langle\sim, \vee\rangle$ sind funktional vollständig.

Die Systeme $\langle\sim\rangle$, $\langle\wedge,\vee\rangle$, $\langle\wedge,\vee,\supset\rangle$ sind nicht funktional vollständig.

Es gibt funktional vollständige Systeme mit genau einem (hier nicht eingeführten) Grundoperator.

Welche konkrete Notation in der Logik verwendet wird, war immer auch von philosophischen Voraussetzungen und Einstellungen abhängig. Maßgeblich war wohl einerseits das Streben nach Präzision und Klarheit, aber selbstverständlich haben auch Bequemlichkeit, ästhetische Gründe und sogar typographische Einschränkungen eine Rolle gespielt. Interessante, heute nicht mehr gebräuchliche Beispiele sind die graphische Notation von Peirce und die flächige (im Gegensatz zur modernen linearen) Schreibweise von Frege. Einen Überblick über die heute angewandten Symbolsysteme bieten die beiden folgenden aus [20, Seite 28,29] entnommenen Tabellen 2.1 und 2.2:

Vielleicht Beispiele?

	Negation	Konjunktion	Adjunktion	Subjunktion	Bisubjunktion
Principia	$\sim A$	$A \cdot B, AB$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
Grundzüge	$\overline{A}$	$A\&B$	$A \vee B, AB$	$A \to B$	$A \sim B$
Hermes	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
DIN	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
weitere	$A', -A$		$A + B$		

Tabelle 2.1: Operatorensymbole

Die Verweise in der linken Spalte beziehen sich auf die Principia Mathematica von Russell und Whitehead, Hilberts mit Ko-Autoren verfaßte grundlegende Logik-Arbeiten, die Münsteraner Schule sowie das Deutsche Institut für Normierung.

Auch die Bezeichnungen für die Operatoren und Quantoren unterscheiden sich häufig von Autor zu Autor. Das ist unproblematisch, da man anhand der semantischen Festlegungen stets ganz genau feststellen kann, was genau der Autor mit „Implikation“, „Konditional“, „Disjunktion“ oder „Universal-Quantor“ meint.

2.1.3 Die Regeln des natürlichen Schließens

Sätze aus der natürlichen Sprache, aus der Philosophie oder auch der Mathematik lassen sich mit den nun zur Verfügung stehenden Mitteln ganz gut formal repräsentieren, dies wird gleich an einem Beispiel gezeigt werden. Allerdings erhebt

	Allquantor	Existenzquantor
Principia	(i)	$(\exists i)$
Grundzüge	(i)	$(\mathrm{E}i)$
Kleene	$\forall i$	$\exists i$
Quine	(i)	$(\exists i)$
DIN	$\forall i$	$\exists i$
weitere	$\bigwedge_i, \bigwedge i, \Pi_i, \Pi i, \bigcap_i$	$\bigvee_i, \bigvee i, \Sigma_i, \Sigma i, \bigcup_i$

Tabelle 2.2: Quantorensymbole

Die Verweise in der linken Spalte beziehen sich auf die Principia Mathematica von Russell und Whitehead, Hilberts mit Ko-Autoren verfaßte grundlegende Logik-Arbeiten, Kleenes und Quines Lehrbücher sowie das Deutsche Institut für Normierung.

sich die Frage, ob denn eigentlich etwas Interessantes der Gegenstand der Logik ist. Man kann die semantischen Regeln für einen reichen Satz an Operatoren und Quantoren direkt angeben und eine Axiomatik formulieren, die korrekt und vollständig für die Prädikatenlogik mit Identität ist. Man kann damit also alle die und nur die Aussagen beweisen, die wahr in jedem beliebigen Modell sind – also ganz genau gar nichts über Mathematik oder Philosophie aussagen. Wozu sollte das gut sein?

Praktische Beweise verlaufen anders. Bereits Mitte der 30ger Jahre haben Logiker regellogische Systeme mit dem Ziel entwickelt, das Schließen eines Mathematikers während des praktischen Beweisens nachzubilden. Die grundlegende Idee besteht darin, daß man aus Prämissen herleitet und ein Beweis die Gültigkeit der Konklusion unter der Voraussetzung der Prämissen garantiert. Der Ausgangspunkt ist das auf Seite 21 bewiesene Deduktionstheorem:

Wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash A$, so $A_1, \ldots, A_n - 1 \vdash A_n \supset A$.

Es ist dies eine Art Regel, nach der man eine Subjunktion in einen Beweis einführen kann: Beweise sind Zeilen von Aussagen, in denen Prämissen gesetzt werden, Hypothesen überprüft werden und nach Regeln neue Zeilen hinzugefügt werden können. So sieht das grobe Schema eines Beweises dann vielleicht aus:

1.	$\{1\}$	A_1	Prämisse
2.	$\{2\}$	A_2	Prämisse
		$\dots$	
$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse
		$\dots$	
$n-1.$	$\{n\}$	A_n	Prämisse
		$\dots$	
$j.$	$\{1,2,\dots,n\}$	A	

In der ersten Zeile wird unter der Zeilennummer „1." die erste Prämisse „A_1" (dritte Spalte) festgehalten, deren Abhängigkeit von sich selbst „$\{1\}$" (charakteristisch für Prämissen und Annahmen – zweite Spalte) konstatiert und die Rechtfertigung „Prämisse" notiert. Dies wird in den nächsten Zeilen für alle vorkommenden Prämissen gleicherweise getan. Die daraufhin folgenden Zeilen ergeben sich nach Regeln, die den Gegenstand dieses Abschnitts bilden. Diese Regeln werden so formuliert werden, daß Abhängigkeiten von den verwendeten Prämissen weiter vererbt werden, so daß im Idealfall in der letzten Zeile j eine Aussage steht, die von allen Prämissen abhängig ist (zweite Spalte) und durch irgendeine Regel gerechtfertigt ist. Sind die Regeln so formuliert worden, daß sie in Übereinstimmung mit der Verwendung des Zeichens „$\vdash$" sind, dann kann man aufgrund der Gültigkeit des Deduktionstheorems den Beweis fortsetzen:

$j+1.$	$\{1,2,\dots,n-1\}$	$A_n \supset A$	E $\supset$
$j+2.$	$\{1,2,\dots,n-2\}$	$A_{n-1} \supset (A_n \supset A)$	E $\supset$
		$\dots$	
$j+n.$	$\{\emptyset\}$	$A_1 \supset (A_2 \supset \dots (A_{n-1} \supset (A_n \supset A))\dots)$	E $\supset$

In der Zeile $j+1$ wird die Regel zur *Einführung einer Subjunktion* E $\supset$ auf die Zeilen j und n angewendet, für die folgenden Zeilen gilt das entsprechend. In der letzten Zeile steht eine Formel, die von keiner Voraussetzung mehr abhängig ist – eine unbedingt, logisch gültige Aussage. Wenn die Regeln, die uns von Zeile zu Zeile bringen, korrekt formuliert sind, sind solche Aussagen wieder die Tautologien der klassischen Prädikatenlogik. Die Regeln selbst sollen zwei Forderungen erfüllen: Sie sollen den Regeln, die Menschen beim Führen von Beweisen tatsächlich verwenden, möglichst nahe kommen, und sie sollen von wahren Aussagen immer wieder zu wahren Aussagen führen. Man verwendet häufig ein Synthese-/Analyseschema, indem für die Operatoren und Quantoren jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel formuliert werden. Die folgenden Regeln sind so zu interpretieren, daß bei vorliegenden Beweiszeilen (über dem Strich) bestimmter Form eine weitere Beweiszeile (unter dem Strich aufgeführt) hinzugefügt werden kann:

$$
\begin{array}{llll}
i. & \{i\} & A_i & \text{Prämisse/Hypothese} \\
j. & \{\Gamma\} & A_j & \\
\hline
k. & \{\Gamma \backslash i\} & A_i \supset A_j & \text{E} \supset,\ i,j
\end{array}
$$

In der Zeile i wird eine Prämisse gesetzt oder eine Hypothese dem Beweis hinzugefügt. Diese kann benutzt werden, um in Zeile j schließlich A_j zu erhalten. Dann ist i in Γ[3] enthalten. Γ kann völlig leer sein, wird die Zeile j jedoch auch unter Verwendung von Zeilen mit anderen Abhängigkeiten als $\{i\}$ oder zusätzlich zu Zeile i hergeleitet, so ist $\{\Gamma\}$ die Menge aller dieser Abhängigkeiten entsprechend den Regeln. In der Zeile k wird eine neue Formel dem Beweis hinzugefügt, dabei verschwindet die Abhängigkeit von Zeile i – es handelt sich um die Anwendung von E $\supset$ auf die Zeilen i und j. All dies läßt sich auch in der (fast) natürlichen Sprache formulieren: Zum Beweis einer Wenn-dann-Aussage setze man hypothetisch den Wenn-Teil. Gelingt es, den Dann-Teil (möglicherweise unter bestimmten anderen Voraussetzungen) herzuleiten, darf die Wenn-Dann-Aussage (unter den erwähnten anderen möglicherweise verwendeten Voraussetzungen) als gültig angenommen werden. Hypothesen, das heißt zusätzliche Annahmen über die Prämissen hinaus, müssen grundsätzlich in umgekehrter Reihenfolge ihres Setzens ausgeschlossen werden (vergleiche dazu unten Beispiel 19).

Die Beseitigungsregel für die Subjunktion ist schon als Schlußregel im axiomatischen Aufbau verwendet worden (Seite 17):

$$
\begin{array}{llll}
i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A_j & \\
j. & \{\Delta\} & A_i & \\
\hline
k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_j \supset A_j & \text{B} \supset,\ i,j
\end{array}
$$

Für die in der zweiten Spalte aufgelisteten Abhängigkeiten gilt, daß bei Regelanwendungen entstehende mehrfache Vorkommen ein und der selben Zeilennummer in ein einziges zusammenfallen. Weiterhin ist (in der klassischen Logik) die Reihenfolge der Vorkommen mit einer wesentlichen Ausnahme nicht wichtig –

[3] $\{\Gamma\}$ wird künftig nicht völlig einheitlich verwendet werden: Manchmal ist es eine Menge von Zeilenzahlen, die auf Prämissen und Hypothesen verweisen, manchmal ist es eine Menge von Formeln (Prämissen und Hypothesen) selbst. Das sollte im Allgemeinen nicht zur Verwirrung führen.

wichtig ist, daß die Abhängigkeiten gesetzter Hypothesen stets ganz rechts eingetragen werden und der Ausschluß dieser *Hypothesen* stets von rechts nach links (von innen nach außen) erfolgt (vergleiche dazu unten Beispiel 19).

Beispiel 13 *Im folgenden Fragment möchte Sokrates gegen die von Homer und anderen vertretene Meinung vorgehen, daß die Götter für alles verantwortlich sind. Insbesondere stört Sokrates, daß die Götter von Menschen dafür herangezogen werden, eigene Verfehlungen (Vertragsbrüche, Unmoral) zu rechtfertigen.*

> **S.** *Ist nun nicht Gott in Wahrheit gut und so darzustellen?*
>
> **A.** *Ohne Widerrede.*
>
> **S.** *Nun ist aber doch nichts Gutes schädlich? ...*
>
> **A.** *Nein, ...*
>
> **S.** *Was nun nicht schädlich ist, richtet das Schaden an?*
>
> **A.** *Nimmermehr.*
>
> **S.** *Was aber keinen Schaden anrichtet, verübt das ein Übel?*
>
> **A.** *Auch das nicht.*
>
> **S.** *Was aber nichts Übeles verübt, ist doch auch nicht Ursache irgendeines Übels?*
>
> **A.** *Wie könnte es das?*
>
> ...
>
> **S.** *Also ist Gott, da er doch gut ist, nicht Ursache von allem, ...*
>
> *[21, S. 122–123]*

Platons Argumentation läßt sich in den folgenden Zeilen zusammenfassen:

1. *Die Gottheit ist gut.*
2. *Wenn die Gottheit gut ist, so ist sie nicht schädlich.*
3. *Wenn die Gottheit nicht schädlich ist, so richtet sie keinen Schaden an.*
4. *Wenn die Gottheit keinen Schaden anrichtet, verübt sie nichts Übeles.*
5. *Wenn die Gottheit nichts Übeles verübt, dann ist sie auch nicht Ursache von Übelem.*

Aus diesen Sätzen, die sich sein Sokrates bestätigen läßt, folgert Platon:

6. *Wenn Gott gut ist, und er ist gut, dann ist er nicht Ursache von allem.*

Die Struktur des Argumentes läßt sich bereits aussagenlogisch darstellen, dazu werden die einfachen Sätze durch Aussagenvariablen repräsentiert:

1.	$\{1\}$	p	*Prämisse*
2.	$\{2\}$	$p \supset p_1$	*Prämisse*
3.	$\{3\}$	$p_1 \supset p_2$	*Prämisse*
4.	$\{4\}$	$p_2 \supset p_3$	*Prämisse*
5.	$\{5\}$	$p_3 \supset p_4$	*Prämisse*
6.	$\{1,2\}$	p_1	***B*** $\supset 1,2$
7.	$\{1,2,3\}$	p_2	***B*** $\supset 3,6$
8.	$\{1,2,3,4\}$	p_3	***B*** $\supset 4,7$
9.	$\{1,2,3,4,5\}$	p_4	***B*** $\supset 5,8$
10.	$\{2,3,4,5\}$	$p \supset p_4$	***E*** $\supset 1,9$

Die Zeile 10 lautet „rückübersetzt“: Wenn Gott gut ist, so ist er nicht Ursache von Übelem. Daraus folgert er – mit anderen Mitteln, aber ganz korrekt – daß Gott nicht Ursache von allem sein kann.[4] *Da er die Zustimmung seines Gesprächspartners zum Vorderglied der Subjunktion „Gott ist gut“ eingeholt hat, darf er auch „Da Gott gut ist … “ sagen. Zeile 10 zeigt auch in der zweiten Spalte, daß der Satz von der Gültigkeit der Prämissen 2–5 abhängig geblieben ist (jedoch ohne das „da“, allein mit „wenn“, nicht mehr von Prämisse 1 abhängt).*

Völlig einfach und einsichtig sind die Regeln für die Konjunktion:

$$
\begin{array}{llll}
i. & \{\Gamma\} & A_i & \\
j. & \{\Delta\} & A_j & \\
\hline
k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_i \wedge A_j & \mathbf{E} \wedge i, j
\end{array}
$$

[4] Leibniz findet viele Jahrhunderte später einen anderen Zugang zu dem gesamten Problem. Platons Frage ist nicht die nach der Entstehung des Bösen, er will seinen Modellstaat vor dem verderblichen Einfluß einer Kunst schützen, die die Götter als schlechtes Beispiel für die Menschen darstellt.

$$\begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \wedge A_j \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i \qquad \mathbf{B} \wedge i \end{array} \qquad \begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \wedge A_j \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_j \qquad \mathbf{B} \wedge i \end{array}$$

Mit diesen Regeln kann man aus einer Konjunktion von Aussagen auf jedes Konjunktionsglied schließen und aus Aussagen auf deren Konjunktion.

Im Gegensatz zu den Konjunktionsregeln bedürfen die für die Adjunktion einer Erläuterung. Zunächst sollen sie angeführt werden:

$$\begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i \vee A_j \qquad \mathbf{E} \vee i \end{array} \qquad \begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_j \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i \vee A_j \qquad \mathbf{E} \vee i \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A & \\ j. & \{\Delta\} & A_j \supset A & \\ k. & \{\Xi\} & A_i \vee A_j & \\ \hline l. & \{\Gamma, \Delta, \Xi\} & A & \mathbf{B} \vee i, j, k \end{array}$$

Die Einführungsregeln **E** $\vee$ sind auf den ersten Blick durchaus einsichtig: Hat man das Recht, eine Aussage zu behaupten, so bietet dies auch eine Rechtfertigung für die Adjunktion dieser Aussage mit einer anderen. Allerdings erlaubt es diese Regel – wie übrigens auch **E** $\supset$ – neue Themen in die Diskussion zu bringen. Nichts in der Formulierung der Regeln verlangt, daß das neu eingeführte Adjunktionsglied thematisch oder sonst irgendwie mit dem bisher geführten Beweis zusammenhängt. Das wird nicht von allen Logikern akzeptiert.

Die Beseitigungsregel **B** $\vee$ entspricht einer Fallunterscheidung (einem „verzweigten Beweis“). Liegen Alternativen vor (Zeile k), und kann man darüber hinaus ein und dasselbe Resultat aus jeder der Alternativen erhalten (Zeilen i und j), so gilt das Resultat. Am bekanntesten ist diese Figur in der natürlichen Sprache sicherlich unter dem Bild, aus zwei Übeln das kleinere wählen zu müssen: Tut man dies, ist es schlecht, tut man jenes, ist es nicht gut, aber eines muß getan werden …

Beispiel 14 *Im folgenden Zitat faßt Sokrates seine Argumentation zusammen, mit der dafür plädiert, daß sich das Verhalten der Menschen nicht gut per Gesetz regeln läßt:*

Sokrates *Meiner Ansicht nach also wäre es das Richtige, daß sich mit dieser Art von Gesetzgebung und Staatsverwaltung kein wirklicher Staatsmann, weder in einem schlecht- noch in einem gutgeordneten Staatswesen abgebe: in dem ersteren nicht, weil es ihm nutzlos ist und keinen Gewinn bringt, in dem letzteren nicht, weil einiges jeder auch für sich finden kann, das übrige aber sich von selbst herausbildet auf Grund der bestehenden Lebensnormen.*

[21, S. 184]

Die Struktur von Platons Argument ist durchaus komplizierter, als im Beispiel zu den Subjunktionsregeln:

1. *Wenn man sich in einem gutgeordneten Staatswesen mit dieser Art Verwaltung beschäftigt, dann ist das nutzlos und bringt keinen Gewinn.*
2. *Wenn diese Art Verwaltung keinen Gewinn bringt, dann soll man sich nicht damit abgeben.*
3. *Wenn man sich in einem schlechtgeordneten Staatswesen mit dieser Art Verwaltung beschäftigt, dann findet jeder sowieso das Richtige selber heraus.*
4. *Wenn diese Art Verwaltung nur zu Ergebnissen führt, die jeder selber erreicht, dann soll man sich nicht damit abgeben.*
5. *Ein Staatswesen ist gutgeordnet oder schlechtgeordnet.*

Die erste und dritte Prämisse sind explizit ausgesprochen, die anderen drei setzt Platon an dieser Stelle voraus. Aus den vor dem Zitat liegenden Seiten wird klar, daß Platon die zweite und vierte für richtig hält, die fünfte ist für ihn selbstverständlich. Daraus schließt er auf:

6. *Mit dieser Art von Verwaltung soll man sich nicht abgeben.*

Wie geht das?

In der nachfolgenden Ableitung sind die Aussagenvariablen folgendermaßen den Sätzen zugeordnet:

p_1	*Ein Staatswesen ist gutgeordnet.*
p_2	*Ein Staatswesen ist schlechtgeordnet.*
p_3	*Die Beschäftigung mit dieser Art von Verwaltung ist nutzlos.*
p_4	*Die Bürger kommen auch ohne diese Art von Verwaltung aus.*
p_5.	*Man soll sich mit dieser Art von Verwaltung nicht beschäftigen.*

Nun der Nachweis, daß Platons Argumentation korrekt ist:

1.	$\{1\}$	$p_1 \supset p_3$	*Prämisse*
2.	$\{2\}$	$p_2 \supset p_4$	*Prämisse*
3.	$\{3\}$	$p_3 \supset p_5$	*Prämisse*
4.	$\{4\}$	$p_4 \supset p_5$	*Prämisse*
5.	$\{5\}$	$p_1 \vee p_2$	*Prämisse*
6.	$\{6\}$	p_1	*Hypothese*
7.	$\{1,6\}$	p_3	***B*** $\supset 1,6$
8.	$\{1,3,6\}$	p_5	***B*** $\supset 3,7$
9.	$\{1,3\}$	$p_1 \supset p_5$	***E*** $\supset 6,8$
10.	$\{10\}$	p_2	*Hypothese*
11.	$\{2,10\}$	p_4	***B*** $\supset 2,10$
12.	$\{2,4,10\}$	p_5	***B*** $\supset 4,11$
13.	$\{2,4\}$	$p_2 \supset p_5$	***E*** $\supset 10,12$
14.	$\{1,2,3,4,5\}$	p_5	***B*** $\vee 5,9,13$
15.	$\{1,2,3,4\}$	$(p_1 \vee p_2) \supset p_5$	***E*** $\supset 5,14$

Der Satz in Zeile 15 ist durchaus so zu übersetzen, wie Platon sich das gedacht und Sokrates es gesagt hat: Mit dieser Art von Verwaltung solle man sich nicht beschäftigen, ob das Staatswesen nun ein gut- oder ein schlechtgeordnetes sei. Er ist abhängig von der Gültigkeit der vier ersten Prämissen – wenn jemand Platons Argumentation angreifen möchte, müßte er eine von diesen in Frage stellen.

Die Einführungsregel für die Negation wird hier als Regel für den indirekten Beweis oder aber als „Beweis aus der Annahme des Gegenteils" eingeführt. Wie die Einführungsregel der Subjunktion bezieht sie sich auf Prämissen und Hypothesen und erlaubt es, Abhängigkeiten von diesen auszuschließen:

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Delta\}$	$\sim A_j$	
$l.$	$\{\Gamma, \Delta \backslash i\}$	$\sim A_i$	**E** $\sim i, j, k$

Diese Regel drückt den Gedanken aus, daß wenn unter einer bestimmten Annahme ein Widerspruch auftritt (eine Beweiszeile und deren Negation), dann diese Annahme nicht stimmen kann. Um die Gültigkeit eines Satzes zu zeigen, nehme man also dessen Negation an und falls man einen Widerspruch erhält, kann man – die Negation der Negation des herzuleitenden Satzes erhalten! Damit das Verfahren komplett ist, benötigt man also noch eine Regel, um die doppelten Negationen wieder loszuwerden: die Beseitigungsregel der Negation:

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad \sim\sim A_i}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \qquad\qquad \mathbf{B} \sim i}$$

Beispiel 15 *Auch Augustinus beschäftigte die Frage, woher das Böse in der Welt wohl komme. Im siebten Buch der* Bekenntnisse *erzählt er davon und schreibt beiläufig, daß er bereits zeitig die Astrologie als Erklärung grundsätzlich abgelehnt habe. Allerdings hätte er ein zusätzliches Argument gegen die Astrologen in der Erzählung eines Freundes, Firminus gefunden:*

> *So erzählte er denn ... als seine Mutter mit ihm, Firminus, schwanger ging, sei zur gleichen Zeit eine Sklavin des Freundes seines Vaters ebenfalls schwanger gewesen. ... Beide Frauen gebaren zur gleichen Zeit, so daß die Freunde für beide Neugeborenen bis auf die Minuten dasselbe Horoskop erstellen mußten ...*

Und dann weiter:

> *Ich sagte ihm, wenn ich anhand seines Horoskops etwas Wahres voraussagen sollte, dann hätte ich in ihm lesen müssen, seine Eltern erfreuten sich des größten Ansehens, er stamme aus einer vornehmen Familie der Stadt, er sei als Freier geboren und habe eine standesgemäße Erziehung und wissenschaftliche Ausbildung. Und wenn mich jener Sklave mit demselben Horoskop befragte, müßte ich, um auch ihm etwas Wahres zu sagen, in diesem Horoskop die Niedrigkeit seiner Familie erkennen, seinen Stand als Sklave und all das übrige, das so verschieden und so entfernt ist vom Leben des Firminus. ... Daraus folgte für mich mit aller Gewißheit, daß, wenn aufgrund von Horoskopen etwas Wahres gesagt werde, dies durch Zufall, nicht durch Wissenschaft zustande komme ...*
> *[2, S. 177–179]*

Die Struktur von Augustinus' Argument kann in den folgenden Sätzen expliziert werden:

1. *Wenn ein wahrheitsgemäßes Horoskop nicht-zufällig zustande kommt, beschreibt es Firminus als vornehm, frei usw.*

2. *Wenn ein wahrheitsgemäßes Horoskop nicht-zufällig zustande kommt, beschreibt es den Sklaven des Freundes des Vaters als niedrig, unfrei usw.*

3. *Die Beschreibung des Firminus ist das Gegenteil der Beschreibung des Sklaven des Freundes des Vaters.*

Daraus schließt Augustinus:

4. *Das wahrheitsgemäße Horoskop ist zufällig zustande gekommen.*

Eine formale Rekonstruktion (unter einer offensichtilichen Zuordnung der Sätze zu den Aussagenvariablen p_1, p_2 *und* p_3 *sieht so aus:*

1.	$\{1\}$	$p_1 \supset p_2$	*Prämisse*
2.	$\{2\}$	$p_1 \supset p_3$	*Prämisse*
3.	$\{3\}$	$p_2 \equiv \sim p_3$	*Prämisse*
4.	$\{3\}$	$p_2 \supset \sim p_3$	*(Hilfsregel)*
6.	$\{6\}$	p_1	*(Hypothese)*
7.	$\{1,6\}$	p_2	***B*** $\supset 1,6$
8.	$\{2,6\}$	p_3	***B*** $\supset 2,6$
9.	$\{1,3,6\}$	$\sim p_3$	***B*** $\supset 4,7$
10.	$\{1,2,3\}$	$\sim p_1$	***E*** $\sim 6,8,9$

(Es gibt eine ganze Reihe von Regeln, die das Beweisen vereinfachen. Hier wird eine in Zeile 4 verwendet, die die Bisubjunktion in eine Konjunktion von Subjunktionen umschreibt.)

Die Regeln, die das Verhalten der aussagenlogischen Operatoren festlegen, werden nun durch Einführungs- und Beseitigungsregeln für die Quantoren ergänzt. Sie sind ungleich komplizierter und über die richtige Formulierung der Variablenbedingungen hat es bis in die 60er Jahre hinein Diskussionen gegeben.

Zunächst soll noch der Begriff einer zulässigen Ersetzung einer Individuenvariablen eingeführt werden:

Definition 19
Mit $A(i/j)$ *wird die Einsetzung von* i *in* A *durch* j *bezeichnet:*

1. *Es werden alle freien Vorkommen der Variablen i in A durch den Term j ersetzt, jedoch*

2. *falls j eine freie Variable enthält (eine Variable ist), so ist j nur dann eine zulässige Einsetzung für i in A, wenn kein freies Vorkommen einer Variablen in j (einschließlich möglicherweise j selbst) in $A(i/j)$ gebunden ist.*

$$\frac{k. \quad \{\Gamma\} \quad A(i/j)}{l. \quad \{\Gamma\} \quad \exists i A(i) \qquad \mathbf{E}\,\exists\, k}$$

Beispiel 16 *Ein Beispiel für die Anwendung dieser Regel **E** $\exists$ ist – unanalysiert – im Beispiel 13 vorgekommen. Formal endete die Ableitung beim Satz „Wenn Gott gut ist, ist er nicht Ursache für das Übele“. Sokrates (Platon) hat im Dialog aber nicht diese, sondern die Schlußfolgerung „Wenn Gott gut ist Gott nicht Ursache von allem“ gezogen. Ein Stück näher an diesen Satz kommt man so:*

a_1	*Gott*
P	*gut*
a_2	*das Übele*
Q	*Ursache von*

1.	$\{\Gamma\}$	$P(a_1) \supset \sim Q(a_1, a_2)$	*aus Bsp. 13*
2.	$\{2\}$	$P(a_1)$	*Hypothese*
3.	$\{\Gamma, 2\}$	$\sim Q(a_1, a_2)$	***B*** $\supset 1, 2$
4.	$\{\Gamma, 2\}$	$\exists x \sim Q(a_1, x)$	***E*** $\exists 3$
5.	$\{\Gamma\}$	$P(a_1) \supset \exists x \sim Q(a_1, x)$	***E*** $\supset 2, 4$

*Der letzte Satz lautet übersetzt: „Wenn Gott gut ist, so gibt es etwas, was er nicht verursacht“. Beim Übergang von Zeile 3 zu Zeile 4 – per **E** $\exists$ – ist die oben erwähnte Einsetzung vollzogen worden. Allerdings erfolgt sie von Zeile vier nach Zeile drei, es wird „oben“ ersetzt: Alle freien Vorkommen von x in $\sim Q(a_1, x)$ wurden gegen a_2 ersetzt.*

Die Einführungsregel für den Quantor $\exists$ ist sehr leicht einzusehen: Wenn etwas bestimmtes eine Eigenschaft hat, dann gibt es selbstverständlich etwas, was diese Eigenschaft trägt – dieser Gegenstand selbst zumindest. Eine entsprechende ganz allgemeine Beseitigungsregel für diesen Quantor kann es nicht geben. Angenommen, es sollte gelten „Wenn es etwas gibt, was eine Eigenschaft hat, dann hat ... diese Eigenschaft", so müßte irgendwie spezifiziert werden, was genau „..." ist. Das kann man nicht allgemein, und manchmal kann man es auch überhaupt nicht. So ist der Satz „Es gibt jemanden, der den vierten Stein des Kölner Doms gelegt hat" ganz sicher wahr, auf „Herr oder Frau Sowieso hat den vierten Stein des Kölner Doms gelegt" kann man wohl aber nicht schließen, egal welchen Namen man für Sowieso einsetzt. Was hier benötigt wird, ist eine Art Platzhalter, ein fiktiver Name, der so etwas bedeutet wie *ein ganz bestimmter, aber unbekannter Gegenstand*. Um diesen Gedanken zu fassen, wird die folgende Regel so formuliert: „Wenn ein Satz aus einer Behauptung für einen gewählten unspezifischen Gegenstand folgt, so folgt er auch aus der Behauptung, daß es einen solchen Gegenstand gibt".

$k.$	$\{\Gamma\}$	$\exists i A_1$	
$l.$	$\{l\}$	$A_1(i/j)$	Hypothese
$m.$	$\{\Gamma, l\}$	A_2	
$n.$	$\{\Gamma\}$	A_2	**B** $\exists^*$ k, l, m

Mit dem Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile l angezeigt: j ist eine Individuenkonstante, die neu im Beweis ist.

Die Einschränkung auf eine *neue* Konstante soll garantieren, daß das neu eingeführte Objekt auf keinerlei Eigenschaften festgelegt ist – wir wissen nichts darüber, und auch, daß es unter A fällt, ist eine *Hypothese*.

Auch die Einführungsregel für den Allquantor ist nur unter einer bestimmten Einschränkung zu verwenden.

$k.$	$\{\Gamma\}$	A	
$l.$	$\{\Gamma\}$	$\forall i A$	**E** $\forall^*$ k

Die Variable i, über die generalisiert wird, darf in keiner der Formeln, auf die $\{\Gamma\}$ verweist, frei vorkommen.

Generalisiert werden darf nur über eine (freie) Variable, die entsprechend den semantischen Regeln für $\forall$ eine beliebige Bedeutung annehmen kann. Für Variablen, die in den Prämissen und Hypothesen frei vorkommen, gilt das nicht. Warum das so ist, wurde bereits auf der Seite 13 angesprochen. Die Einschränkung garantiert, daß nur über Variablen generalisiert wird, die frei in logisch wahren Sätzen vorkommen oder aus der Anwendung der folgenden Regel zur Beseitigung des Allquantors entstanden sind.

$$\frac{k.\quad \{\Gamma\}\quad \forall i A}{l.\quad \{\Gamma\}\quad A(i/j)\qquad \mathbf{B}\,\forall\, k}$$

Beispiel 17 *Die in Beispiel 13 begonnene formale Explikation war in Beispiel 16 noch nicht zu Ende gebracht worden, der letzte Satz lautete in der natürlichen Sprache etwa „Wenn Gott gut ist, dann gibt es etwas, wofür er nicht Ursache ist". Im folgenden soll abschließend gezeigt werden, daß von den gleichen Prämissen dann auch der gesuchte Satz „Wenn Gott gut ist, so ist er nicht für alles Ursache" abhängig ist:*

1.	$\{\Gamma\}$	$P(a_1) \supset \exists x{\sim}Q(a_1, x)$	*aus Bsp. 16*
2.	$\{2\}$	$P(a_1)$	*Hypothese*
3.	$\{\Gamma, 2\}$	$\exists x{\sim}Q(a_1, x)$	***B*** $\supset 1, 2$
4.	$\{\Gamma, 2\}$	${\sim}Q(a_1, b)$	***B*** $\exists\, 3$
5.	$\{5\}$	$\forall x Q(a_1, x)$	*Hypothese*
6.	$\{5\}$	$Q(a_1, b)$	***B*** $\forall\, 5$
7.	$\{\Gamma, 2\}$	${\sim}\forall x Q(a_1, x)$	***B*** ${\sim}4, 5, 6$
8.	$\{\Gamma\}$	$P(a_1) \supset {\sim}\forall x Q(a_1, x)$	***E*** $\supset 2, 7$

Formeln, die aus einer leeren Menge von Prämissen beweisbar sind, heißen Theoreme.

2.1.4 Die Rechtfertigung der Regeln

Warum sind gerade diese Regeln gewählt worden? Auf diese einfache Frage gibt es eine ganze Reihe von Antworten, von denen an dieser Stelle zwei genauer besprochen werden sollen. Die erste lautet: Weil die Regeln von Aussagen, die wahr unter einer Belegung und Interpretation sind, zu Aussagen führen, die wieder wahr unter dieser Belegung und Interpretation sind. Die zweite Antwort besteht in der auch daraus folgenden Erkenntnis, daß genau diese Regeln hinreichend und notwendig sind, um die Tautologien der Prädikatenlogik zu beweisen.

Die semantische Begründung

Für die meisten aussagenlogischen Regeln ist der folgende Satz völlig einsichtig und leicht zu überprüfen, die Einschränkungen der Quantorenregeln ermöglichen den Beweis in den entsprechenden Fällen[1ex]

Satz 22
Sei

$$\begin{array}{lll} i_1 & \{\Gamma_1\} & A_1 \\ & & \dots \\ i_n & \{\Gamma_n\} & A_n \\ \hline j & \{\Gamma\} & A \qquad \textit{Regel} \end{array}$$

eine der Regeln $\mathbf{E}\sim$, $\mathbf{B}\sim$, $\mathbf{E}\wedge$, $\mathbf{B}\wedge$, $\mathbf{E}\vee$, $\mathbf{B}\vee$, $\mathbf{E}\supset$, $\mathbf{B}\supset$, $\mathbf{E}\forall$, $\mathbf{B}\forall$, $\mathbf{E}\exists$ *oder* $\mathbf{B}\exists$. *Dann gilt:*
Für alle $\mathcal{M}$ *und* ν: *Wenn* $\mathcal{M}, \nu \models A_1, \dots \mathcal{M}, \nu \models A_n$, *so* $\mathcal{M}, \nu \models A$.

Beweis Für den Beweis werden die Regeln einzeln durchgegangen. Hier sind sie der Darstellung wegen in zwei Gruppen eingeordnet: Regeln ohne weitere Besonderheiten, Regeln mit Hypothesen und Regeln mit Einschränkungen (und Hypothesen).

In der folgenden Aufstellung steht links eine Regel und rechts davon jeweils eine dazu gehörende Formel:

$$\boxed{\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A_j & \\ j. & \{\Delta\} & A_i & \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_j \supset A_j & \mathbf{B} \supset,\ i, j \end{array}} \qquad ((A_i \supset A_j) \wedge A_i) \supset A_j$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i & \\ j. & \{\Delta\} & A_j & \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_i \wedge A_j & \mathbf{E} \wedge i, j \end{array}} \qquad A_i \wedge A_j \supset A_i \wedge A_j$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \wedge A_j & \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i & \mathbf{B} \wedge i \end{array}} \qquad A_i \wedge A_j \supset A_i$$

$$\begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i \end{array} \qquad A_i \supset A_i \vee A_j$$

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A & \\ j. & \{\Delta\} & A_j \supset A & \\ k. & \{\Xi\} & A_i \vee A_j & \\ \hline l. & \{\Gamma, \Delta, \Xi\} & A & \mathbf{B} \vee i, j, k \end{array} \qquad ((A_i \supset A) \wedge (A_j \supset A) \wedge (A_i \vee A_j)) \supset A$$

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & {\sim}{\sim}A_i & \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i & \mathbf{B} \sim i \end{array} \qquad {\sim}{\sim}A_i \supset A_i$$

$$\begin{array}{llll} k. & \{\Gamma\} & A(i/j) & \\ \hline l. & \{\Gamma\} & \exists i A(i) & \mathbf{E} \exists\, k \end{array} \qquad A(i/j) \supset \exists i A(i)$$

$$\begin{array}{llll} k. & \{\Gamma\} & \forall i A & \\ \hline l. & \{\Gamma\} & A(i/j) & \mathbf{B} \forall\, k \end{array} \qquad \forall i A \supset A(i/j)$$

Eine Überprüfung der Formeln neben den Regeln zeigt, daß alle diese Formeln Tautologien der Prädikatenlogik sind. Sie sind also, mit anderen Worten, in jedem Modell unter jeder Belegung der freien Variablen wahr. Außerdem sind diese Formeln so, daß vor dem Hauptoperator „Subjunktion“ die Konjunktion der Prämissen der jeweiligen Regel steht und nach der Subjunktion die Konklusion. Würde es ein Modell und eine Belegung geben, für die die Prämissen wahr und die Konklusion der Regel falsch werden, so könnte die Formel offenbar keine Tautologie sein (sie würde den Wert falsch annehmen). Also führen die Regeln von Formeln, die in einem bestimmten Modell unter einer Belegung wahr sind, wieder zu solchen Formeln.

$$\begin{array}{llll} k. & \{\Gamma\} & A & \\ \hline l. & \{\Gamma\} & \forall i A & \mathbf{E} \forall^*\, k \end{array} \qquad i \text{ ist nicht frei in } \Gamma!$$

Angenommen, $\forall iA$ nimmt in einem Modell unter einer Belegung ν den Wert falsch an. Dann gibt es eine Belegung ν_i (die sich höchstens im Wert für i von ν unterscheidet), für die A den Wert falsch annimmt. Da i nicht frei in den Formeln vorkommt, auf die $\{\Gamma\}$ verweist, stammt es aus einer Formel ohne Abhängigkeit (einem Theorem) oder ist gebunden in Γ. Da die **B** $\exists$ Individuenkonstanten produziert, muß i allquantifiziert sein. Für Theoreme gilt die Regel **E** $\forall$ uneingeschränkt, und ist i allquantifiziert gewesen, so darf es alle Werte annehmen, auch $\nu_i(i)$. Also ist der Wert von A für jede Belegung wahr, dies im Widerspruch zur Annahme.

Regeln, die Hypothesen einführen und beseitigen, strukturieren den Beweis in Teilbeweise. Die Formulierung einer solchen Hypothese eröffnet einen Teilbeweis, der geschlossen werden muß, bevor der „übergeordnete“ Beweis weiter geführt wird. Selbstverständlich können weitere Teilbeweise innerhalb von Teilbeweisen geführt werden, die entsprechend zuerst geschlossen werden müssen. Da alle Beweise endlich sind, gibt es nicht unendlich viele Teilbeweise innerhalb eines Beweises und so gibt es immer „innerste“ Beweise, solche, innerhalb derer keine Regeln mehr angewendet werden oder doch nur solche Regeln, die selbst keine Hypothesen aufstellen und beseitigen. Es reicht nun aus folgendem Grunde, immer nur die innersten Regelanwendungen zu betrachten: Falls es Regeln unter Verwendung von Hypothesen innerhalb der Schritte von der Einführung bis zur Beseitigung der Hypothese gibt, so müssen zunächst diese Schritte gerechtfertigt werden. Für die gilt unter Umständen dasselbe. Da es aber innerste Anwendungen gibt, führt deren Rechtfertigung (mit der der Regeln ohne Hypothesen) zur Rechtfertigung der nächst-inneren Anwendung von Hypothesenregeln und so fort. Da jeder Beweis endlich ist, betrachten wir also die drei verbleibenden Regeln als ob in den einzelnen Schritten von der Einführung der Hypothese bis zu deren Ausschluß nur die oben bereits gerechtfertigten Regeln angewendet worden sind. Wenn gezeigt wurde, daß die innersten Regeln von wahren Aussagen zu wahren Aussagen führen, so führen – entsprechend der selben Argumentation – Anwendungen von Regeln, die innerste Hypothesenregeln verwenden, ebenfalls von wahren zu wahren Aussagen. Die dürfen dann wieder in Anwendungen von Hypothesenregeln verwendet werden ...

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Gamma \backslash i\}$	$A_i \supset A_j$	E $\supset$, i, j

Angenommen, die Formel $A_i \supset A_j$ ist falsch in einem Modell unter einer Belegung. Dann muß unter dieser Belegung in diesem Modell A_i wahr und A_j falsch sein – das heißt, daß irgendwo zwischen den Zeilen i und j eine Regelanwendung von einer wahren (im Modell unter einer Belegung) zu einer falschen (in diesem Modell bei dieser Belegung) Formel geführt hat. Es ist aber bereits gezeigt worden, daß die Regeln (ohne Hypothesen) das nicht tun können.

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Delta\}$	$\sim A_j$	
$l.$	$\{\Gamma, \Delta \backslash i\}$	$\sim A_i$	**E** $\sim i, j, k$

Angenommen, $\sim A_i$ ist falsch in einem Modell unter einer Belegung. Dann ist A_i wahr in diesem Modell und unter dieser Belegung. Da unter dieser Belegung entweder A_j oder $\sim A_j$ falsch ist, ist aus einer wahren Aussage (im Modell unter einer Belegung) eine falsche abgeleitet worden. Dies ist aber nicht möglich, da die Regeln (ohne Hypothesen) das nicht zulassen.

$k.$	$\{\Gamma\}$	$\exists i A_1$		
$l.$	$\{l\}$	$A_1(i/j)$	Hypothese	j ist eine Individuenkonstante, die neu im Beweis ist.
$m.$	$\{\Gamma, l\}$	A_2		
$n.$	$\{\Gamma\}$	A_2	**B** $\exists^*$ k, l, m	

Angenommen, A_2 ist falsch in einem Modell unter einer Belegung. Dann ist unter dieser Belegung in diesem Modell $A_1(i/j)$ ebenfalls falsch, weil sonst Regelanwendungen von einer wahren ($A_1(i/j)$) auf eine falsche (A_2) Formel geführt hätten. Unter der Voraussetzung, daß $\exists i A_1$ wahr im Modell unter dieser Belegung ist, läßt sich folgender Widerspruch konstruieren:

Da $\exists i A_1$ wahr ist, gibt es eine Belegung für i derart, daß A_1 wahr im Modell unter dieser Belegung ist. Da j im Beweis vor Zeile l nicht vorkommt, betrachten wir ein Modell, was sich vom Ursprungsmodell nur darin unterscheidet, daß $\mathcal{I}(j) = \nu_i(i)$. In diesem Modell sind die Zeilen k und l wahr, während Zeile m falsch ist. Dies ist aber für die hypothesenfreien Regeln nicht möglich.

Damit ist der Beweis beendet.[5] Mit dem Satz und dem Beweis wurde nachgewiesen, daß die Regeln des natürlichen Schließens von wahren Aussagen zu wah-

[5]Es ist nicht schwierig, hinter dem Beweis die Struktur einer vollständigen Induktion zu er-

ren Aussagen führen. Kann man eine Argumentation entsprechend formal nachvollziehen und zweifelt dennoch an der Wahrheit der Schlußfolgerung, so sind nicht die Schlußregeln, nicht die Logik die Quelle der Falschheit. Eine (mindestens eine) der Prämissen muß falsch sein. Mit diesem Ziel sind die Regeln bereits gewählt worden und genau darum kommen diese (oder andere mit der gleichen Eigenschaft) Regeln in den Formulierungen des Systems des natürlichen Schließens vor. Selbstverständlich gilt ein Satz 5 entsprechender Satz nicht für beliebige Regeln.

Beispiel 18 *Die meisten Philosophen, die sich mit Kausalitätstheorie beschäftigen, würden eine Regel wie die folgende akzeptieren:*

1.	*Ereignis a_i ist Ursache des Ereignisses a_j*
2.	*Ereignis a_j ist Ursache des Ereignisses a_k*
Also	*Ereignis a_i ist Ursache des Ereignisses a_k*

Formale Ansätze, die die Transitivität der Kausalrelation nicht von allein erzwingen (Lewis' kontrafaktische-Konditionale-Zugang, probabilistische Versionen) bilden den „transitiven Abschluß" über die nichttransitive Grundrelation.

*Die Regel ist keine logische Regel in dem Sinne, daß sie von wahren Aussagen (1, 2) im Modell zwangsläufig zu einer Aussage (*Also*) führt, die wahr im Modell ist. So könnte man die zweistellige Relation „ist Ursache von" in einem Modell so interpretieren, wie im Deutschen „folgt unmittelbar auf" interpretiert ist. Dann können die Sätze 1 und 2 beide wahr sein, der Also-Satz aber falsch. Die Regel ist also grundverschieden von den oben erwähnten logischen Regeln. Das heißt natürlich nicht, daß die Regel in einer Kausaltheorie nicht gelten könnte (ich halte sie allerdings für ungültig).*

Nur „wahr-zu-wahr"-Regeln zum Beweisen zu verwenden, ist ganz sicher beruhigend. Welche Regeln genau uns zur Verfügung stehen, wird im nächsten Abschnitt betrachtet.

Die systematische Begründung

Die Regeln des natürlichen Schließens sind so formuliert, daß mit ihrer Hilfe genau die Tautologien der Prädikatenlogik voraussetzungsfrei beweisbar sind. Das

kennen: Sei die „Schachteltiefe" eines Beweises ohne Hypothesen gleich 0 und die Schachteltiefe eines Beweises mit Unterbeweisen um eines größer als die Summe der Schachteltiefen der Unterbeweise. Die Induktion über die Schachteltiefe lautet im induktiven Schritt: Wenn der Satz für alle Schachteltiefen $< n$ gilt, gilt er auch für Beweise mit der Schachteltiefe n.

heißt mit anderen Worten, daß das System korrekt und vollständig im Sinne der Ergebnisse aus Abschnitt 1.3 und 1.5. Auch dies kann zur Rechtfertigung der Auswahl gerade dieser Regeln verwendet werden – hat man es doch mit einem gut untersuchten System zu tun. Darauf basiert eine ganze Reihe von interessanten Theorien, die in der Philosophie eine große Rolle spielen.

Satz 23
$\vdash_{NatSchl} A$ genau dann, wenn $\models A$.

Beweis Von links nach rechts ist der Beweis aufgrund von Satz 22 ganz einfach: Eine Beweiszeile in einem Beweis im System des natürlichen Schließens ist in allen Modellen unter allen Belegungen wahr, in denen die Formeln wahr sind, auf die mit den Abhängigkeiten verwiesen wird. Wenn $\vdash_{\text{NatSchl}} A$, dann ist $\{\emptyset\}$ die Menge der Abhängigkeiten und A also wahr in allen Modellen unter allen Belegungen.

Für den Beweis, daß alle Tautologien beweisbar sind, wird Satz 18 benutzt, aus dem folgt, daß alle Tautologien im axiomatischen System beweisbar sind. Wenn es gelingt zu zeigen, daß alle Theoreme des axiomatischen Systems im System des natürlichen Schließens bewiesen werden können, so sind alle Tautologien im System des natürlichen Schließens beweisbar.[6] Dazu reicht es hier zu zeigen, daß die Axiome im System des natürlichen Schließens beweisbar sind (die Abhängigkeitscharakteristik $\{\emptyset\}$ haben. Schließlich sind die Regeln des axiomatischen Systems auch Regeln im natürlichen Schließen und zwar solche, die keine neuen Abhängigkeiten einführen.

Beispiel 19 *Die Beweise sind einfach, als Beispiel wird hier Axiom 5 betrachtet: $\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall B)$, wobei i in A nicht frei vorkommt.*

[6] Vergleiche dazu auch Seite 43. Etwas genauer liegen die Tautologien und Theoreme ja in zwei Sprachen $\mathcal{L}_{\text{ax}}$ und $\mathcal{L}_{\text{ns}}$ vor. Außerdem gibt es eine Übersetzung $\otimes$ aus $\mathcal{L}_{\text{ns}}$ nach $\mathcal{L}_{\text{ax}}$, so daß gilt: $\models A$ in $\mathcal{L}_{\text{ns}}$ genau dann, wenn $\models A^{\otimes}$ in $\mathcal{L}_{\text{ax}}$. Der Beweis zeigt, daß die Übersetzungen der Tautologien im System des natürlichen Schließens beweisbar sind. Dann bleibt zu zeigen, daß wenn die Übersetzungen beweisbar sind, die Tautologien selbst ebenfalls beweisbar sind. Die beiden „fehlenden" Schritte gelingen leicht mit Hilfe der Definition 18 auf Seite 43.

1.	$\{1\}$	$\forall i(A \supset B)$	*Hypothese*
2.	$\{1\}$	$A \supset B$	***B*** $\forall 1$
3.	$\{3\}$	A	*Hypothese*
4.	$\{1,3\}$	B	***B*** $\supset 2,3$
5.	$\{1,3\}$	$\forall iB$	***E*** $\forall 4$ *(i nicht frei in 1,3)*
6.	$\{1\}$	$A \supset \forall iB$	***E*** $\supset 3,5$ *„innere“ Hypothese*
7.	$\{\}$	$\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall B)$	***E*** $\supset 1,6$ *„äußere“ Hypothese*

Einen axiomatischen Beweis kann man nun ganz leicht in einen im System des natürlichen Schließens umbauen: Man setze anstelle der verwendeten Axiome deren Beweis im natürlichen Schließen und vollende den Beweis dann mit Hilfe der beiden gültigen Regeln **Gen** (1.2.1) – das ist **E** $\forall$ – und **MP** (1.2.1) – dies ist **B** $\supset$.

2.2 Identität

Die Prädikatenlogik mit Identität stellt den Grundbestand der logischen Systeme dar, sie ist der Kern und der Maßstab für die Entwicklung von Theorien und alternativen Logiken. Mit der Identitätsrelation ist eine ganze Reihe von interessanten philosophischen Problemen verbunden. Hintikka paper

2.2.1 Die Identitätsrelation

Die Identität sollte nicht mit der Bisubjunktion oder der Äquivalenz verwechselt werden: Die Bisubjunktion ist ein zweistelliger aussagenbildender Operator, die Äquivalenz ist eine Implikation in beiden Richtungen und drückt Bewertungsgleichheit in den gleichen Modellen aus. Die Identität dagegen ist zwar auch ein zweistelliges Prädikat, welches aber die Eigenschaft von Paaren ausdrücken soll, Paare von untereinander genau gleichen Gegenständen zu sein. So ist die Identität wie die Bisubjunktion sprachlich (und nicht metasprachlich), sie ist Relation wie die Äquivalenz (und nicht synkategorematisch). Um die Identität in die Sprache einzuführen, wird eine Prädikatenkonstante eingeführt, danach können die Eigenschaften der Relation axiomatisch und semantisch festgelegt werden:

Definition 20
Sei „$=$“ eine Prädikatenkonstante. Wenn i und j Individuenvariablen oder -konstanten sind, ist $i = j$ eine Prädikatformel.

A6 $i = i$ ***(Ref)***

A7 $i = j \supset (A(i) \equiv A[i/j])$, *wobei A eine atomare Formel ist und $A[i/j]$ die Ersetzung von irgendwelchen Vorkommen der freien Individuenvariablen oder der Individuenkonstanten i durch den für die Substitution freien Term j bezeichnet.* ***(Sub)***

$\mathcal{M}, \nu \models i = j$ genau dann, wenn $\mathcal{F}(i) \doteq \mathcal{F}(j)$, wobei

$$\mathcal{F}(k) = \begin{cases} \mathcal{I}(k) & \text{falls } k \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \nu(k) & \text{falls } k \text{ eine Individuenvariable ist} \end{cases}$$

und $\doteq$ eine Identitätsrelation in der Metasprache ist.

Sowohl die axiomatische als auch die semantische Charakterisierung der Identität sagen uns etwas über die Relation: Die beiden Axiome legen fest, daß jeder Gegenstand mit sich selbst identisch ist, und daß identische Gegenstände die gleichen (atomaren) Eigenschaften haben. Für die hier behandelte Logik läßt sich zeigen, daß sich der Fall des atomaren Prädikates A auf beliebig komplexe Aussagefunktionen verallgemeinern läßt. Die semantische Regel besagt, daß eine Identitätsaussage genau dann von einem Modell und einer Belegung erfüllt wird, wenn Interpretations- beziehungsweise Belegungsfunktion den singulären Termen rechts und links vom Identitätszeichen semantisch ununterscheidbare Gegenstände aus dem Universum zuschreiben. Im intuitiv naheliegensten Fall heißt das, daß $i = j$ genau dann wahr bei einer Interpretation und Belegung sind, wenn i und j unter dieser Interpretation und Belegung Namen für den gleichen Gegenstand sind.

Beispiel 20

In der formalen Sprache selbst haben wir die namensartigen Ausdrücke, die Individuenkonstanten, als kleine lateinische Buchstaben eingeführt: $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ und die Elemente des Interpretationsbereiches mit entsprechenden Buchstaben d_i. In der natürlichen Sprache stehen die Individuenkonstanten für Worte oder Wortgruppen, die Elemente des Universums für die durch die Worte zu bezeichnenden Gegenstände. Natürlich können wir uns auch auf diese immer nur mit Worten beziehen: „Adams (einzige) Hochzeit ist auch Beas (einzige) Hochzeit“ verwendet zwei singuläre Termini um zu behaupten, daß es nur eine Hochzeit gegeben hat. Die beiden Ereignisnamen sind mit der Interpretationsfunktion auf den gleichen Gegenstand, auf das Ereignistoken in Raum und Zeit, abgebildet worden. Gerade dazu sind Identitätsaussagen da.

Behält man im Blick, daß bei interessanten Identitätsaussagen regelmäßig drei Entitäten eine Rolle spielen (zwei namensartige Ausdrücke und ein Element des Interpretationsbereiches, der „Welt“), dann ist der Sinn der Definition 20 völlig klar: A6 (Ref) muß gelten, denn namensartige Ausdrücke werden eindeutig behandelt, ein und derselbe Name weist stets auf den gleichen Gegenstand. A7 (Sub) behauptet die Ununterscheidbarkeit der Identischen und muß gelten, weil ein Gegenstand nicht unter verschiedenen Namen seine Eigenschaften wechselt. Die semantische Definition verwendet ein Zeichen für die Identität in der Metasprache $\doteq$, irgendwie muß schließlich gesagt werden, daß die Funktionswerte von $\mathcal{I}$ für die beiden Ausdrücke gleich sind. Das kann formal natürlich nicht mit Hilfe der sprachlichen Identitätsrelation $=$ gesagt werden, natürlichsprachlich verwenden wir die gleichen Bezeichnungen.

Aristoteles hat im Grunde die Festlegungen aus Definition 20 gekannt. In der *Topik* schreibt er:

> Das Identische, um es nur in einem allgemeinen Umriß zu beschreiben, scheint drei verschiedene Bedeutungen zu haben. Wir nennen etwas identisch der Zahl oder der Art oder der Gattung nach: der Zahl nach identisch das, was mehr als einen Namen hat, aber nur ein Ding ist, . . . ; der Art nach, was mehr als eines ist, aber keinen Unterschied in der Art aufweist, . . . der Gattung nach identisch, was unter dieselbe Gattung fällt, . . .
> [1, S. 9]

Mensch und Mensch sind Aristoteles art-identisch, Mensch und Pferd gattungsidentisch. Diese interessieren hier nicht, die von Aristoteles erwähnte Zahl-Identität ist erkennbar das, was mit der semantischen Festlegung gefaßt werden soll.[7] Den Aspekt der Ersetzbarkeit hat er auch gesehen (er verweist darauf, daß man die Bezeichnungen vertauschen kann [1, S. 10]) und schreibt später genauer:

> Ob aber etwas mit etwas identisch oder von ihm verschieden ist . . . muß man nach den Beugungsformen, dem Begriffsverwandten und dem Entgegengesetzten beurteilen. . . . Endlich muß man die Identität beurteilen nach dem Hervorbringenden und Zerstörenden, dem Werden und Vergehen und überhaupt nach allem, was zu beiden das gleiche Verhältnis hat: bei allem, was schlechthin identisch ist, ist es auch

[7] Nicht ganz genau, Aristoteles betrachtet nicht singuläre Terme (Namen), sondern vorrangig generelle Terme.

> sein Werden und Vergehen, was es hervorbringt und was es zerstört. Man muß auch sehen, ob, falls von zwei Dingen eines irgend etwas am meisten sein soll, auch von dem anderen in ebendieser Hinsicht das Prädikat „am meisten“ gilt ...
> [1, S. 161]

> Überhaupt muß man alles ins Auge fassen, was wie immer von jedem der beiden ausgesagt wird und wovon beide ausgesagt werden[8], und muß sehen, ob irgendwo die Übereinstimmung fehlt. Was von dem einen, muß von dem anderen, und wovon das eine, von dem muß auch das andere ausgesagt werden.
> [1, S. 164]

Nicht jeder Philosoph kann sich mit dem durch Definition 20 vorgegebenen Verständnis von Identität anfreunden. Hegel hält den *Satz der Identität* (bei ihm als $A = A$ formuliert, [12, S. 28]) für den Ausdruck einer leeren Tautologie – damit hat er Recht, denn $a = a$ ist wahr in allen Modellen. Nach Hegel hat der Satz der Identität noch einen anderen Ausdruck: A kann nicht zugleich A und Nicht-A sein [12, S. 31]. Da man singuläre Termini (Namen beispielsweise) nicht negieren kann, wird es sich bei den A also um generelle Termini handeln und man muß Hegels anderen Ausdruck wohl so interpretieren, daß A nicht gleichzeitig A und etwas von A Verschiedenes sein kann (ein Baum etwa und etwas ganz anderes – eine Zahl). Das trifft aber nicht nur auf A zu, sondern auf überhaupt alles: Nichts kann sowohl A als auch etwas von A ganz Verschiedenes (im Sinne einer Termnegation) sein. Es ist völlig unklar, welche Rolle die Identität dabei spielt. Daß Hegel tatsächlich ein völlig anderes Verständnis von dieser Relation hat, zeigt sich ein paar Seiten weiter bei der Behandlung der Verschiedenheit, die im Zusammenhang mit der Identität steht:

> Alle Dinge sind verschieden, oder: Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind. – Dieser Satz ist in der Tat dem Satze der Identität entgegengesetzt, denn er sagt aus: A ist ein Verschiedenes, also A ist auch nicht A; oder A ist einem andern ungleich, ...
> [12, S. 38]

Hier verwendet Hegel *fünf* Formulierungen:

---

[8] Die prädikative Verwendung verweist wieder darauf, daß Aristoteles generelle Termini betrachtet.

1. Alle Dinge sind verschieden.

2. Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind.

3. A ist ein Verschiedenes.

4. A ist auch nicht A.

5. A ist einem anderen ungleich.

Das Zitat läßt sich nur so interpretieren, daß die fünf Formulierungen untereinander äquivalent sind und daß sie dem Satz von der Identität ($A = A$) „entgegengesetzt" sind. Letzteres kann kaum heißen, daß diese Sätze Negationen des Satzes von der Identität sind, denn Hegel hält sie für wahr. Im folgenden wird versucht, die Hegelschen Sätze zu explizieren.

Alle Dinge sind verschieden.
Dies kann heißen, daß alle Dinge von sich selbst verschieden sind, oder aber, daß alle Dinge untereinander verschieden sind: $\forall x \sim x = x$ oder $\forall x \forall y \sim x = y$. Die Aussage $\forall x \sim x = x$ ist eine Kontradiktion, ihre Negation ist ableitbar:

1.	$\{\}$	$\forall x\, x = x$	Ref
2.	$\{\}$	$x = x$	**B** $\forall$
3.	$\{3\}$	$\forall x \sim x = x$	Hypothese
5.	$\{3\}$	$\sim x = x$	**B** $\forall$
6.	$\{\}$	$\sim \forall x \sim x = x$	**E** $\sim$

Die Aussage $\forall x \forall y \sim x = y$ ist ebenfalls eine Kontradiktion:[9]

$\mathcal{M}, \nu \models \forall x \forall y \sim x = y$	Annahme
$\mathcal{M}, \nu_x \models \forall y \sim x = y$	für alle ν_x
$\mathcal{M}, \nu_{xy} \models \sim x = y$	für alle ν_{xy}
$\mathcal{M}, \nu_{xy} \not\models x = y$	für alle ν_{xy}
$\mathcal{M}, \nu_{xy} \models x = y$	für kein ν_{xy}
$\langle \nu_{xy}(x), \nu_{xy}(y) \rangle \in \mathcal{I}(=)$	für kein ν_{xy}

Für alle $\nu_{xy}(x) \doteq \nu_{xy}(y)$ gilt jedoch $\langle \nu_{xy}(x), \nu_{xy}(y) \rangle \in \mathcal{I}(=)$.

Der Satz ist also in beiden Interpretationen dem Satz von der Identität buchstäblich „entgegengesetzt", aber auch logisch falsch.

[9] Vergleiche Abschnitt 1.1.2.

Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind.
Wie im gleich folgenden Abschnitt zu Anzahlaussagen gezeigt werden wird, wird die Phrase „es gibt zwei … “ unter Zuhilfenahme von negierten Identitätsaussagen in die Sprache der Prädikatenlogik übersetzt. Tatsächlich wird die Aussage dann eine Tautologie, wie der Satz von der Identität:
$\sim\exists x \exists y(\sim x = y \wedge x = y)$
– Es gibt keine Gegenstände, die untereinander nicht identisch sind und auch gleich. Einen Gegensatz zum Satz von der Identität gibt es nicht. Hätte Hegel aber eine der ersten Aussage äquivalente Aussage formulieren wollen (was er nicht getan hat), dann hätte er sagen können: Es gibt keine Dinge, die einander gleich sind. Da damit die Bedingung fällt, daß es sich um *zwei*, also um numerisch verschiedene Dinge handeln soll, ergibt sich die kontradiktorische, der Aussage $\forall x \forall y \sim x = y$ eng verwandte Aussage $\sim\exists x \exists y\ x = y$.

A ist ein Verschiedenes.
Dieser Satz ist vernünftigerweise höchstens so zu interpretieren, daß es etwas gibt, wovon sich A unterscheidet. Nun benutzt Hegel den Buchstaben „A“ als Leerstelle, wie eine Variable. Es ist eine angemessene Vermutung, daß Hegel meint, daß ein *beliebiger Gegenstand* ein Verschiedenes ist. Dann läßt sich das so ausdrücken:
$\forall x \exists y \sim x = y$
Diese Formel ist – im Gegensatz zu den bisher betrachteten – erfüllbar, aber keine Tautologie. Es läßt sich leicht ein Modell angeben, in welchem sie falsch ist und eines, in dem sie wahr ist: In jedem Modell mit einem Gegenstandsbereich mit genau einem Gegenstand ist die Formel falsch (denn die beiden Variablen können nur mit dem einen gleichen Gegenstand belegt werden und damit gilt $\nu_{xy}(x) \doteq \nu_{xy}(y)$. In jedem Gegenstandsbereich mit mehr als einem Element können die Variablen unterschiedlich belegt werden und die Formel wird wahr. Anders gesagt, legt die Formel auf Individuenbereiche fest, in denen es mehr als einen Gegenstand gibt. In diesen gilt selbstverständlich das Gesetz von der Identität und man könnte sagen, daß beide Aussagen insofern „entgegengesetzt“ sind, indem einer sichert, daß es für alles etwas gibt, was ihm gleich ist, der andere jedoch, daß es etwas gibt, was sich von ihm unterscheidet.

A ist auch nicht A.
Hegel verwendet „nicht A“ und nicht, wie an anderer Stelle um eine Termnegation zu bezeichnen, „Nicht-A“. Dann bleiben für das „nicht“ noch zwei Interpretationen übrig, von denen in der klassischen Prädikatenlogik nur eine zulässig ist. Dies

ist die aussagenlogische Negation, der Satz wird expliziert als $\sim x = x$ (eventuell mit Quantoren oder einer Konstanten anstelle der Variablen). Das Ergebnis ist in jedem Falle eine Kontradiktion. Interessanter ist der – aus der klassischen Logik herausführende – Versuch, eine Prädikatnegation zu verwenden: „ist-nicht-identisch“ oder „un-identisch“. Dann besagt der in Frage stehende Satz, daß ein oder jeder Gegenstand un-identisch mit sich selbst ist. Aus Un-Identität folgt jedoch Nicht-Identität und sollte die Semantik für die Un-Identität so aufgebaut sein, daß solche Aussagen falsch in jedem Modell sind.

A ist einem anderen ungleich.
Dies ist, wie oben bereits beschrieben, eine erfüllbare Aussage die auf Modelle mit mehr als einem Element im Gegenstandsbereich festlegt.

Hegel hat also im zitierten Abschnitt eine Tautologie, Kontradiktionen und erfüllbare Aussagen verwendet. Eine Definition wie 20 paßt also vermutlich gar nicht zu seinen Gedanken denn er glaubt schließlich, synonyme Aussagen getroffen zu haben.

Satz 24 *Die Identität ist symmetrisch und transitiv.*

Beweis

1.	$\{1\}$	$x = y$	Hypothese
2.	$\{\}$	$x = x$	Ref
3.	$\{\}$	$x = y \supset (x = x \equiv y = x)$	Sub
4.	$\{1\}$	$(x = x \equiv y = x)$	$\mathbf{B} \supset 1, 3$
5.	$\{1\}$	$x = x \supset y = x$	abgeleitete Regel
6.	$\{1\}$	$y = x$	$\mathbf{B} \supset 2, 5$
7.	$\{\}$	$x = y \supset y = x$	$\mathbf{E} \supset 1, 6$
8.	$\{\}$	$\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$	$2 \times \mathbf{E}\,\forall$

1.	$\{1\}$	$x = y$	Hypothese
2.	$\{\}$	$x = y \supset (y = z \equiv x = z)$	Sub
3.	$\{1\}$	$y = z \equiv x = z$	$\mathbf{B} \supset 3, 1$
4.	$\{1\}$	$y = z \supset x = z$	abgeleitete Regel
5.	$\{\}$	$x = y \supset (y = z \supset x = z)$	$\mathbf{E} \supset 1, 4$
6.	$\{\}$	$\forall x \forall y \forall z (x = y \supset (y = z \supset x = z))$	$3 \times \mathbf{E}\,\forall$

Mit der Einführung der Identitätsrelation sind die Ausdrucksmöglichkeiten der Prädikatenlogik – im Gegensatz zur Einführung der Operatoren $\wedge$, $\vee$, $\exists$ – wesentlich erweitert worden. Während mit den Quantoren nur Aussagen darüber gemacht werden können, ob ein bestimmtes Prädikat überhaupt auf irgendwelche Gegenstände im Individuenbereich zutrifft oder nicht, kann man mit Hilfe der Identität Anzahlaussagen treffen: *Es gibt mehr als eine (also: mindestens zwei) Ursache für jedes Ereignis*; *es gibt höchstens vier Urelemente*; *es gibt genau einen Erstbeweger*.

Beispiel 21

$$\forall x \exists y \exists z (Q(y,x) \wedge Q(z,x) \wedge \sim y = z)$$

$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4) \wedge \\ \forall y (P(y) \supset x_1 = y \vee x_2 = y \vee x_3 = y \vee x_4 = y))\end{aligned}$$

$$\exists x (P_1(x) \wedge \forall y (P_1(y) \supset x = y))$$

Der erste Satz besagt, daß es für jedes Ereignis zwei gibt, die jeweils Ursache des ersten sind und untereinander nicht identisch. Dies heißt natürlich nicht, daß es nicht noch andere Ursachen geben könnte oder eine der Ursachen mit ihrer Wirkung identisch sein könnte. Der zweite Satz besagt, daß es vier Gegenstände gibt, die Urelemente sind, und daß jedes Ding, welches Urelement ist, eines dieser vier ist. Das heißt nicht, daß es nicht auch nur drei Urelemente geben könnte. Grundsätzlich lassen sich mit diesen beiden Aussagentypen „exakt n soundso"-Ausdrücke konstruieren. Die einfachste Version hat ein Beispiel im dritten Satz – es gibt einen Erstbeweger und alles, was Erstbeweger ist, ist dieser.

Wenn es genau einen Gegenstand einer bestimmten Art gibt, dann kann man diesen Gegenstand unter Zuhilfenahme dieser Eigenschaft eindeutig charakterisieren: derjenige, welcher.

2.2.2 Die bestimmte Kennzeichnung

Bestimmte Kennzeichnungen (definite Deskriptionen) spielen in der Philosophie eine große Rolle. Hier sind einige Beispiele:

Beispiel 22

1. *Dasjenige, über welches hinaus nichts größeres gedacht werden kann, ist Gott.*

2. *Die erste Ursache aller Bewegung ist selbst unbewegt.*

Solche Ausdrücke sind auch in der natürlichen Sprache weit verbreitet. Der Grund dafür ist, daß es nur sehr wenige Gegenstände gibt, die echte Namen tragen: Menschen, manche Haustiere, geographische Orte wie Berge und Flüsse gehören dazu, aber auch Kraftfahrzeuge (Kennzeichen) oder Rechner im Netz. In den allermeisten Fällen haben Gegenstände gar keine solchen Namen, beispielsweise die meisten Tiere, Pflanzen, Steine, Elektronen, Hochzeiten, Vulkanausbrüche. Aber selbst wenn Namen vorhanden sind, sind dem Sprecher oder dem Hörer nicht bekannt, und so bezieht man sich mit Hilfe von Beschreibungen auf Gegenstände. Dazu wird ein Operator benutzt, der zu einer Beschreibung – das ist eine Formel mit einer freien Variablen – den Träger der Beschreibung liefern soll:

Definition 21
Wenn A eine Formel ist und i deren einzige Variable, ist $\hat{\imath}A$ ein Term.

Über solche Terme soll genauso prädiziert werden können, wie über echte Namen. Natürlich gibt es einen Unterschied zwischen den Aussagen „Auf dem Tschomolungma liegt Schnee“, „Auf dem Mount Everest liegt Schnee“ und „Auf dem höchsten Berg der Erde liegt Schnee“. Hörer oder Sprecher mögen nicht wissen, daß der Tschomolungma der Mount Everest ist und dieser der höchste Berg der Erde. Es kann daher sein, daß man einen oder zwei der Sätze für wahr hält, den dritten aber nicht bewerten kann oder will oder gar für falsch hält. Da es in unserer Welt allerdings der Fall ist, daß $\mathcal{I}$(Tschomolungma)=$\mathcal{I}$(Mount Everest)=$\mathcal{I}$(der höchste Berg der Erde), ist jeder der Sätze genau dann wahr, wenn der Mount Everest Element der Menge ist, die durch die Interpretationsfunktion dem Prädikat „trägt Schnee“ zugeschrieben wird. In diesem Sinne sollen bestimmte Kennzeichnungen genauso funktionieren wie Individuenkonstanten.

Der wesentliche Unterschied zwischen Indidividuenkonstanten und bestimmten Kennzeichnungen besteht darin, daß die Individuenkonstanten definitionsgemäß perfekt referieren: Jeder Konstanten wird durch die Interpretationsfunktion genau ein Element des Gegenstandsbereiches zugeschrieben. Es gibt keine leeren Namen und auch Mehrdeutigkeiten sind durch die Formulierung der Semantik ausgeschlossen. Für bestimmte Kennzeichnungen kann man das nicht voraussetzen, eine Phrase wie „die Ursache des Üblen“ kann leer sein (wenn es keine

Ursache für das Üble gibt), kann gelungen bezeichnen (wenn es genau eine entsprechende Ursache gibt) und kann auch mehrdeutig sein (wenn es mehr als eine Ursache für das Üble gibt). Dies ist davon abhängig, in welcher Art von Welt wir leben.

Unter welchen Bedingungen würde man eine Aussage wie

> Die erste Ursache aller Bewegung ist selbst unbewegt

als wahr bezeichnen? Bertrand Russell [23] hat vor etwa einhundert Jahren darauf hingewiesen, daß es dazu einer ersten Ursache aller Bewegung bedarf, diese auch nicht mehrfach vorkommen darf und sie schließlich dann noch selbst unbewegt sein muß. Russell hat vorgeschlagen, Sätzen wie den genannten auf entsprechende Weise umzuschreiben:

> Es gibt eine erste Ursache aller Bewegung und sie ist die einzige und sie ist selbst unbewegt.

Die formalen Mittel für eine solche Ersetzung sind bereits in der Prädikatenlogik mit Identität enthalten.

Definition 22
Seien A_1 und A_2 Formeln mit einer freien Variablen und i eine Variable. Dann gilt:
$\mathcal{M}, \nu \models A_2(\hat{\imath} A_1) \quad =_{\texttt{dfn}} \quad \mathcal{M}, \nu \models \exists i(A_1(i) \wedge \forall j(A_1(j) \supset i = j) \wedge A_2(i))$

Damit können bestimmte Kennzeichnungen aus der Sprache eliminiert werden, im rechten Teil der Definition kommen gar keine mehr vor. Die Festlegung erlaubt es, anstelle von Sätzen mit bestimmten Kennzeichnungen *andere* Sätze zu bewerten und aus deren Wahrheit oder Falschheit auf die der Ausgangssätze zu schließen. Daß wir in der Sprache Kennzeichnungen bilden können, die nicht eindeutig referieren, spielt nun keine Rolle mehr. Auf welche Weise kann der Beispielsatz über die erste Ursache aller Bewegung fehlschlagen?

- Es gibt gar keine erste Ursache aller Bewegung. Dann gilt nicht
  $$\mathcal{M}, \nu \models \exists x \text{ ersteUrsache}(x)$$
  und damit auch nicht
  $\mathcal{M}, \nu \models$
  $$\exists x(\text{ersteUrsache}(x) \wedge \forall y(\text{ersteUrsache}(y) \supset x = y) \wedge \text{ unbewegt}(x)).$$
  Dann gilt $\mathcal{M}, \nu \not\models \text{ unbewegt}(\hat{x} \text{ ersteUrsache}(x))$.

- Es gibt mehr als eine erste Ursache aller Bewegung. Dann gilt nicht
  $$\mathcal{M}, \nu \models \exists x \forall y(\text{ersteUrsache (y)} \supset x = y)$$
  und damit auch nicht
  $\mathcal{M}, \nu \models$
  $\exists x(\text{ersteUrsache}(x) \wedge \forall y(\text{ersteUrsache}(y) \supset x = y) \wedge \text{ unbewegt}(x))$.
  Dann gilt $\mathcal{M}, \nu \not\models$ unbewegt($\hat{x}$ ersteUrsache(x)).

- Es gibt zwar eine erste Ursache aller Bewegung, aber sie ist nicht selbst unbewegt. Dann gilt
  $\mathcal{M}, \nu \models$
  $\exists x(\text{ersteUrsache}(x) \wedge \forall y(\text{ersteUrsache}(y) \supset x = y) \wedge \sim \text{unbewegt}(x))$.
  Dann gilt auch $\mathcal{M}, \nu \not\models$ unbewegt($\hat{x}$ ersteUrsache(x)).

Der Punkt auf den es ankommt ist der, daß der Terminus, der eine bestimmte Kennzeichnung ausdrückt, in der Russellschen Formulierung gar nicht mehr vorkommt. Entsprechend einfach lassen sich auch negative Existenzaussagen mit bestimmten Kennzeichnungen verwenden:

Es gibt keine erste Ursache aller Bewegung

ist eine negierte quantifizierte Aussage:

$\sim\exists x$ ersteUrsache(x).

Negative Existenzaussagen mit Namen (Individuenkonstanten) kommen in der natürlichen Sprache genauso selbstverständlich vor, immer wieder kann man Sätze hören wie

Pegasus gibt es nicht,

Den Weihnachtsmann gibt es nicht.

Die Hoffnung, solche Aussagen adäquat mit Hilfe des Existenzquantors und der Identitätsrelation in der Sprache der Prädikatenlogik auszudrücken, schlägt fehl. „Pegasus“ und „der Weihnachtsmann“ sind Eigennamen, die üblicherweise durch Konstanten expliziert werden, beispielsweise a und b:

$\mathcal{I}(a) =$ Pegasus $\qquad *$

$\mathcal{I}(b) =$ der Weihnachtsmann

Dann könnte man meinen, die „gibt es nicht“-Formulierungen sind mit folgendem Schema auszudrücken:

$\sim\exists i\ i = j$, wobei j die entsprechende Konstante ist

– es gibt kein i, das ein j wäre. Dies kann aber nicht funktionieren. Da die Konstante j interpretiert ist, gibt es ein Element im Interpretationsbereich, auf das die Belegung die Variable i so abbilden kann, daß $i = j$ erfüllt ist – nämlich den Funktionswert der Interpretationsfunktion für j. Damit kann $\sim\exists i\ i = j$ für kein Modell wahr werden und tatsächlich ist $\forall k \exists i\ i = k$ eine Tautologie (und beweisbar). Indem man Namen als Individuenkonstanten verwendet, verpflichtet man sich in der klassischen Prädikatenlogik auf eine entsprechende Entität im Individuenbereich. Die oben mit $*$ gekennzeichnete Interpretation der Konstanten erzwingt das Vorhandensein von Pegasus und Weihnachtsmann im Individuenbereich, sie sind Gegenstände. Damit ist es aber nun nicht mehr möglich, ihre Existenz zu verneinen, denn dazu müßte man sich auf sie beziehen und ihren Namen verwenden. Das Problem ist unter der Bezeichnung „Platons Bart" bekannt geworden – auf die Aussage, daß es den nicht gebe, könne man fragen, was das denn sei, das es da nicht gibt.

Um dieses Problem herum ist eine ganze Menge Literatur geschrieben worden, und da die klassische Prädikatenlogik tatsächlich solche Aussagen wie die über Pegasus oder den Weihnachtsmann entweder einfach nicht betrachtet, oder aber „mythologische Existenz", „Existenz als Objekt des Denkens" und andere eher obskure Konzepte ins Spiel bringt, ist es auch gegen die (Verwendbarkeit und Angemessenheit der) Logik eingewendet worden. An dieser Stelle soll lediglich ein einziger Lösungsweg aufgezeigt werden, den Quine [22] im engen Anschluß an Russells Theorie der bestimmten Kennzeichnungen vorgeschlagen hat.

Quines Idee läuft darauf hinaus, Eigennamen als Abkürzungen von entsprechenden bestimmten Kennzeichnungen zu verstehen. Für „Pegasus" schlägt er vor, „das geflügelte Pferd, das Bellerophon erbeutet hat" zu verwenden. Der oben erwähnte Satz über die Nichtexistenz von Pegasus wird in dieser Analyse zu

Das geflügelte Pferd, das Bellerophon erbeutet hat, gibt es nicht

und diese Aussage ist mit den Mitteln der Prädikatenlogik gut zu verstehen. Konkret ist sie wahr, wenn es im Individuenbereich kein Pferd gibt, welches sowohl geflügelt als auch von Bellerophon erbeutet worden ist. Quine weist darauf hin, daß die charakteristische Eigenschaft nicht unbedingt besonders interessant oder informativ sein muß, die einzig wichtige Bedingung ist, daß sie den Gegenstand eindeutig kennzeichnet. Im Extremfall spricht laut Quine nichts dagegen, Eigenschaften wie „Pegasus-Sein" oder auch „Pegasieren" zu verwenden. Individuenkonstanten (Namen, für die natürliche Sprache) sind dann nicht unbedingt notwendig, da immer die entsprechenden Kennzeichnungen verwendet werden können. Insbesondere leisten die Namen in dieser Konzeption keinerlei Beitrag zur ontologischen Belastung von Theorien, es sind eher Worte wie „einige“, „keine“ oder „derjenige“, die den ontologischen Rahmen bestimmen. Das berüchtigte Diktum, nach dem Sein heißt, der Wert einer gebundenen Variable zu sein, reduziert sich auf die prädikatenlogische Trivialität, daß alle akzeptierten Entitäten im Wertebereich der Belegungsfunktion liegen.

2.3 Funktionen

Mit Quines Methode gelingt es, auf Objekte die Namen haben mit bestimmten Kennzeichnungen zu referieren. Umgekehrt ist es selbstverständlich so, daß – zumindest in der natürlichen Sprache – nicht alle Gegenstände, auf die man mit bestimmten Kennzeichnungen Bezug nehmen kann, auch einen Namen haben. Gerade dazu verwendet man ja Kennzeichnungen häufig, um sich auf Gegenstände ohne Namen zu beziehen.

Grundsätzlich kann man davon ausgehen, daß interessante Sprachen weniger Namen als Gegenstände im Interpretationsbereich haben und in der Regel auch über Mittel verfügen, Namen neu zu bilden. Mit diesen Namen kann man sich dann auf Gegenstände beziehen, die noch keinen (alten, vorgegebenen) Namen haben oder bereits eine Bezeichnung in der Sprache besitzen.

Beispiel 23

- *Betrachten wir das Prädikat „sind Brüder“. Es kann auf unterschiedlich große Gruppen von Personen angewendet werden: „Adam und Bert sind Brüder“, „Adam, Bert und Chris sind Brüder“, „Adam, Bert, . . . , und Karl sind Brüder“ und so fort. Dabei läßt sich „Brüder“ ganz gewiß nicht so behandeln, wie etwa „Boxer“, denn „Adam und Bert sind Boxer“ ist eine stilistische Variante des (aussagenlogisch) komplexen Satzes „Adam ist ein Boxer und Bert ist ein Boxer“ während „Adam ist ein Bruder und Bert ist ein Bruder“ offenkundiger Unsinn ist. Die naheliegende Lösung besteht darin, daß „sind Brüder“ Gesamtheiten zum Subjekt hat, ein einstelliges Prädikat ist. Solche Gesamtheiten werden auch als* Tupel *bezeichnet, Paare und Tripel sind Beispiele für Tupel (nämlich 2-Tupel und 3-Tupel). Zwei der eben verwendeten Sätze sehen dann so aus:*

$$sindBr\ddot{u}der(\langle\langle Adam, Bert\rangle\rangle);$$
$$sindBr\ddot{u}der(\langle\langle Adam, Bert, Chris\rangle\rangle)$$

mit $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ als Funktion, die aus zwei Termen (Individuenkonstanten, Individuenvariablen, Tupeln) einen Paar-Term und aus dreien einen Tripel-Term und generell aus n Termen ein n-Tupel bildet[10]*. Das „und“ in „Adam und Bert sind Brüder“ ist also kein aussagenlogisches Und, keine Konjunktion, sondern das Und der Paarbildung. Läßt man die Tupelbildung zu, gehören neben den Gegenständen auch Paare, Tripel usw. zum ontologischen Inventar. Das heißt unter anderem, daß sich Worte wie „alle“ und „manche“ auch auf Tupel beziehen und Tupel Eigenschaften haben können, die (einzelnen, nicht über die Tupelbildung konstruierten) Gegenständen nicht zukommen. So werden Ehepaare anders besteuert als Einzelpersonen und die Skatrunde trinkt einen Kasten Bier am Abend aus (was keiner der Spieler schafft).*

- *Worte sind genauso gute Gegenstände wie die durch sie bezeichneten Gegenstände selbst – und das trifft sogar auf Wortgruppen und Sätze zu, bei denen vielleicht noch nicht so ganz klar ist, was sie bezeichnen. Man kann über Worte Aussagen treffen, so ist „ ‘kurz’ ist kurz“ wahr, während „ ‘lang’ ist lang“ falsch ist. Zu beachten ist, das ein Gegenstand und sein Name stets verschiedene Gegenstände sind – ‘Adam’ ist ein Name, Adam aber nicht. Mit der gleichen Methode, mit Anführungszeichen nämlich, bilden wir Namen von Sätzen: „ ‘kurz’ ist kurz“ steht einige Zeilen weiter oben und dem Satz wurde das Prädikat* wahr zu sein *zugeschrieben. Die Anführungszeichen verschiedener Art und verwandte Konstrukte dienen dazu, aus Ausdrücken die Namen dieser Ausdrücke zu bilden.*

Funktionen können ganz abstrakt in die Sprache der Prädikatenlogik eingeführt werden. An dieser Stelle werden nur Terme betrachtet, die mittels Funktionen aus Termen (und nicht aus anderen sprachlichen Einheiten) gebildet werden können. Dazu werden zunächst die Mittel syntaktisch zur Verfügung gestellt und anschließend wird über eine semantische Festlegung gesichert, daß das Resultat der Anwendung einer Funktion einen Wert aus dem Interpretationsbereich zugeschrieben bekommt. Die folgende Definition ist also als Ergänzung zu den Definitionen 2 auf Seite 6 und 5 auf Seite 9:

[10] Vernünftigerweise werden für die formale Verwendung Tupelbildungen für jedes n eingeführt, also eine Funktion für jede Zahl von Argumenten.

Definition 23

1. *Zum Alphabet wird eine Liste von n-stelligen Funktionssymbolen*

$$v_1^1, v_2^1, \ldots, v_1^n, \ldots, v_m^n, \ldots$$

   hinzugefügt.

2. *Termdefinition*

   (a) *Individuenvariablen und Individuenkonstanten sind Terme.*

   (b) *Wenn t_m^n ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $i_1, \ldots, i_n$ sind Terme, so ist $t_m^n(i_1, \ldots, i_n)$ ein Term.*

3. *Definition einer Prädikatformel*

   Wenn f_m^n ein n-stelliges Prädikat ist und $i_1, \ldots, i_n$ sind Terme, so ist $f_m^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine Prädikatformel (atomare Formel).

4. *Die Interpretationsfunktion $\mathcal{I}$ wird so erweitert, daß sie jedem Funktionssymbol t_m^n eine n-stellige Funktion auf dem Interpretationsbereich zuschreibt:*
   $\mathcal{I}(t_m^n)$ ist eine Funktion $F : \mathbb{D}^n \mapsto \mathbb{D}$
   und
   $\mathcal{I}(t_m^n(i_1, \ldots, i_n)) \;=\; \mathcal{I}(t_m^n)(\mathcal{I}(i_1), \ldots, \mathcal{I}(i_n))$.

Wirklich interessante Probleme mit der Identität ergeben sich erst, wenn neben Namen Funktionen und bestimmte Kennzeichnungen verwendet werden. Namen tragen, im Gegensatz zu Kennzeichnungen und funktionalen Bezeichnungen, keinen semantischen Gehalt – man kann an den Namen ohne faktisches Wissen über das Modell nicht erkennen, welcher Gegenstand gemeint ist oder ob zwei Namen den gleichen Gegenstand bezeichnen. Frege hat darauf hingewiesen, daß selbst dieser einfache Fall nicht unproblematisch ist:

Beispiel 24

> *$a = a$ und $a = b$ sind offenbar Sätze von verschiedenem Erkenntniswerte: $a = a$ gilt a priori und ist nach Kant analytisch zu nennen, während Sätze von der Form $a = b$ oft sehr wertvolle Erweiterungen*

> *unserer Erkenntnis enthalten und a priori nicht immer zu begründen sind.*
> *[9, S. 424]*

Frege verweist darauf, daß eine (wahre) Aussage $a = b$ schließlich genau wie $a = a$ das Bestehen der mit „=“ bezeichneten Relation eines Gegenstandes zu sich selbst bezeichnet, also eigentlich genauso uninformativ sein sollte, wie jene. Ist sie aber nicht, denn daß der Morgenstern der Abendstern ist, ist unter Umständen eine neue Information und jedenfall irgendwann einmal eine echte Erkenntnis gewesen. Daß der Morgenstern der Morgenstern ist, ist jedoch analytisch und trägt keine Information. Bekanntlich unterscheidet Frege zwischen der Bedeutung eines Ausdrucks (für Eigennamen sind das die bezeichneten Gegenstände) und seinem Sinn (der Art und Weise des Gegebenseins dieses Gegenstandes). Freges Lösung sieht dann so aus:

> *Wenn nun $a = b$ ist, so ist zwar die Bedeutung von „b“ dieselbe wie die von „a“ und also auch der Wahrheitswerth von „$a = b$“ derselbe wie von „$a = a$“. Trotzdem kann der Sinn von „b“ von dem Sinne von „a“ verschieden sein, und mithin auch der in „$a = b$“ ausgedrückte Gedanke verschieden von dem von „$a = a$“ ausgedrückten sein; dann haben beide Sätze auch nicht denselben Erkenntniswerth.*[11]
> *[9, S. 439]*

Mit dem in der Definition 20 beschriebenen Apparat ist es leicht zu erklären, worin der Unterschied zwischen der Aussage $a = a$ und der wahren Aussage $a = b$ besteht: Die erste ist wahr unter jeder Interpretation der Individuenkonstanten, die zweite besagt genau, daß die beiden Konstanten gleich interpretiert sind. Tatsächlich heißt das auf der semantischen Seite (als Bedingung im Modell formuliert), daß rechts und links der metasprachlichen Relation $\doteq$ in beiden Fällen genau das gleiche metasprachliche Zeichen zur Bezeichnung eines bestimmten Elementes aus dem Interpretationsbereich steht. Die fehlende neue Information besteht darin, daß die Wahrheit der Aussage $a = b$ auf Modelle festlegt, in denen das so ist. Um im Beispiel zu bleiben: Der Morgenstern ist immer der Morgenstern, was immer der Morgenstern auch sonst noch ist. Wenn aber der Morgenstern der Abendstern ist, wissen die Sprecher sich in einer Welt, in der das mit „Morgenstern“ bezeichnete und das mit „Abendstern“ bezeichnete das gleiche sind – was

[11] Frege verwendet in dieser Passage die Anführungszeichen, um Namen von Ausdrücken – von Namen und Sätzen – zu bilden. „Sinn von“ und „Bedeutung von“ kann man vernünftig nur von Ausdrücken sagen, nicht von anderen Gegenständen.

immer dies auch ist. Das muß natürlich nicht so sein – es ist leicht sich eine Welt vorzustellen, in der der Morgenstern die Venus und der Abendstern der Mars ist.

Um das nächste philosophiehistorisch interessante Beispiel vorzubereiten, wird ein konkretes Modell betrachtet: Sei der Interpretationsbereich $\mathbb{D}$ die Menge der Natürlichen Zahlen. Verwendet wird eine übliche prädikatenlogische Sprache mit Identität und den Individuenkonstanten $\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{2}}, \ldots, \underline{\mathbf{n}}, \ldots$ sowie einer Funktion $+$, die die Rolle der Addition übernimmt. Die entsprechenden Regeln für die Interpretation sind

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}(+) & = & \dot{+} \\ \mathcal{I}(\underline{\mathbf{1}}) & = & 1 \\ \mathcal{I}(\underline{\mathbf{2}}) & = & 2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \mathcal{I}(\underline{\mathbf{n}}) & = & n \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Die unterstrichenen und fettgesetzten Zahlen gehören zur Sprache und bezeichnen die entsprechenden natürlichen Zahlen im Interpretationsbereich. Wie ähnlich im Falle der Identitätsrelation bezeichnet das bloße Zeichen $+$ eine Funktion in der Sprache, der die mathematische Addition $\dot{+}$ (gepunktet) im Bereich der natürlichen Zahlen entspricht. Welchen Regeln $\dot{+}$ entspricht, weiß man aus der Schulmathematik, die Regeln für $+$ müssen axiomatisch festgelegt werden[12].

Beispiel 25
Sind mathematische Urteile synthetisch oder analytisch? Das hängt selbstverständlich davon ab, was man unter „analytisch" und „synthetisch" versteht. Außerdem könnte es immerhin sein, daß sich nicht alle „mathematischen" Urteile gleich verhalten. Gegenstand sind deshalb hier einfache arithmetische Urteile und Kants Verständnis von „analytisch": Erstens versteht er analytische Urteile als diejenigen, die nach dem Satze des Widerspruchs eingesehen werden können. Grob gesagt heißt das, daß die Annahme des Gegenteils (der Negation) ohne weiteres Wissen zu einem Widerspruch führen würde. Zweitens bezeichnet er die Urteile als analytisch, in denen das Prädikat bereits im Subjekt enthalten ist.[13] *Im folgenden Zitat hält er sich an die zweite Deutung:*

[12] In einem späteren Abschnitt wird das getan werden.

[13] Ob und unter welchen Bedingungen die beiden Charakterisierungen äquivalent sind, wird hier nicht untersucht. Der schwierige Punkt ist, daß Kant die traditionelle Logik voraussetzt und über Begriffe redet. Um das angemessen darstellen zu können, benötigt man eine Terminitheorie.

> *Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch. . . . Man sollte zwar denken: dass der Satz* $7+5=12$ *ein bloss analytischer Satz sei, der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Widerspruches erfolge. Allein, wenn man es näher betrachtet, so findet man, dass der Begriff der Summe von* 7 *und* 5 *nichts weiter enthalte, als die Vereinigung beider Zahlen in eine einzige, wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches diese einzige Zahl sei, die beide zusammenfasst.*
> *[14, S. 67, 69]*

Kant verweist dann darauf, daß man die Anschauung brauche, um die Zwölf in der Summe von Sieben und Fünf zu finden. Kann man die Zwölf nicht finden?

In der oben beschriebenen Sprache lautet Kants Satz

$$+(\underline{\mathbf{7}},\underline{\mathbf{5}})=\underline{\mathbf{12}}$$

und damit er wahr ist, sollte gelten

$$\mathcal{I}(+(\underline{\mathbf{7}},\underline{\mathbf{5}}))\doteq\mathcal{I}(\underline{\mathbf{12}})$$

das heißt

$$\mathcal{I}(+)(\mathcal{I}(\underline{\mathbf{7}}),\mathcal{I}(\underline{\mathbf{5}}))\doteq\mathcal{I}(\underline{\mathbf{12}})$$

Letzteres ist eine Aussage aus der Schulmathematik, keine (formale) arithmetische Aussage, sie besagt etwas über die Verhältnisse im Bereich der natürlichen Zahlen:

$$7\dot{+}5\doteq 12$$

$\dot{+}$ *ist in der Schulmathematik eine Funktion, deren Wert für die Argumente* 7 *und* 5 *genau* 12 *ist. Anders ausgedrückt:* $\mathcal{I}(+)(\mathcal{I}(\underline{\mathbf{7}}),\mathcal{I}(\underline{\mathbf{5}}))$*, als* $7\dot{+}5$*,* ist nichts anderes als 12. *Man kann die Zwölf also durchaus finden und solche mathematischen Urteile sind analytisch, solange die Semantik die Schulmathematik enthält.*

Beispiel 26 *Die Argumentation aus Beispiel 25 läßt sich nicht auf beliebige Identitätsaussagen anwenden, es gibt synthetische Identitätsaussagen. Ein Beispiel ist Freges „der Morgenstern ist der Abendstern“. Während man kein Weltwissen braucht, um die Zwölf als die Bedeutung von* $7\dot{+}5$ *zu erkennen, muß man empirische Tatsachen zur Kenntnis nehmen, um* $\mathcal{I}$*(Morgenstern) als den gleichen Himmelskörper (die Venus) wie* $\mathcal{I}$*(Abendstern) erkennen zu können. Um mit Kant zu sprechen: Im Begriff des Morgensterns ist es nicht enthalten, der Abendstern zu sein.*

Man kann die Konstanten „Morgenstern“ und „Abendstern“ auch als Abkürzungen für die entsprechenden Kennzeichnungen betrachten, die aufgrund ihres Aufbaus semantischen Gehalt haben – sie beinhalten Prädikate, mit denen Sätze gebildet werden können. Die Identitätsaussage sieht damit vielleicht so aus:

$$\exists x \exists y (L(x) \wedge \forall z (L(z) \supset x = z) \wedge E(y) \wedge \forall z (E(z) \supset y = z) \wedge x = y)$$

(Es gibt Dinge so, daß eines der letzte Stern am Morgen ist und für alles gilt, daß wenn es letzter Stern am Morgen ist, es dieses Ding ist, und eines erster Stern am Abend ist und für alles gilt, daß wenn es erster Stern am Abend ist, es dieses Ding ist, und diese Dinge sind gleich.)

Falls man nun zeigen könnte (vermutlich kann man es nicht), daß die Gesetze der Astronomie (und der Physik und der Mathematik) $\forall x(L(x) \equiv E(x))$ erzwingen würden und diese Teil der vorausgesetzten Semantik wären, dann wäre „Abendstern-Sein“ Teil des Begriffes vom Morgenstern und Freges Aussage wäre analytisch. In der Debatte zwischen Carnap und Quine bezüglich des Begriffes „analytisch“ hat also Quine (gegen Carnap) insofern Recht, als daß es keine ein für allemal feststehende Abgrenzung zwischen analytischen und synthetischen Aussagen gibt – eine Aussage kann dies oder jenes unter bestimmten Voraussetzungen sein. Carnap hat aber (gegen Quine) Recht mit seiner Meinung, daß es einen (formulierbaren, intuitiv akzeptablen) Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Aussagen gibt. Analytisch wahr ist, was wahr aufgrund der Logik und der gewählten Regeln in der Semantik (das sind die terminologischen Festlegungen) ist.

2.4 Eine Substitutionssemantik

Die in Abschnitt 1.1.2 vorgestellte Semantik explizierte den Begriff der logischen Wahrheit als „wahr in jedem Modell“. Man kann nun einige der mit diesem Begriff verbundenen Voraussetzungen und Implikationen hinterfragen:

- Wahrheit in jedem Modell heißt auch, daß in der Metasprache (in der die Semantik formuliert ist) über alle Individuenbereiche quantifiziert wird. Die Individuenbereiche sind Mengen, und zumindest seit den Paradoxien von Cantor und Russell ist bekannt, daß eine unspezifische Bezugnahme auf „alle Mengen“ zu Problemen führen kann.[14] Verweis Cantor-Paradox

[14] Siehe dazu auch die Abschnitte 3.3.1 und

- Der Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 20, Seite 38) besagt, daß jede Formelmenge, die überhaupt ein Modell hat (und also irgendwie „wahr werden“ kann), auch ein Modell mit einem abzählbaren Interpretationsbereich hat.[15] Abzählbare Mengen sind aber weit weniger suspekt, als der Bereich überabzählbarer Mengen. Sollte man nicht versuchen, logische Wahrheit von überabzählbar großen Mengen unabhängig zu machen?

- Der Interpretationsbereich wird als nichtleere Menge vorausgesetzt. Kann es eigentlich sein, daß die Logik in ihrer Gültigkeit von kontingenten Tatsachen wie der Größe des Interpretationsbereiches abhängig ist?

- Die Interpretationsfunktion weist jedem singulären Terminus ein Objekt aus dem Interpretationsbereich zu. Damit können keine leeren Termini vorkommen („Weihnachtsmann“, „rundes Quadrat“, „Goldwürfel mit einer Kantenlänge von einer Meile“). Auch dies kann man als (unzulässige?) Festlegung über den kontingenten Zustand der Welt interpretieren. Dies macht es sogar schwierig, wahre Aussagen über die Nichtexistenz, über das Fehlen bestimmter Entitäten in der Welt zu treffen.

- Die zugrunde liegende Konzeption der Prädikation, Dinge, die unter Eigenschaften fallen und Eigenschaften, die wahr oder falsch von Dingen sind, drängt auf eine korrespondenztheoretische Wahrheitsauffassung hin. Ist es tatsächlich Sache der Logik, in der Frage, woher die Rechtfertigung für prädikative Aussagen kommt, Partei zu nehmen?

Aufgrund solcher und weiterer innerlogischer Fragen hat man immer wieder versucht, eine andere Interpretation für die Quantoren zu nutzen. Am Ausgangspunkt der Diskussion stehen zwei Ideen: Zum einen sollten möglichst wenige, möglichst akzeptable Mengen eine Rolle spielen. Eine Menge ist etwa akzeptabel, wenn sie nicht überabzählbar groß ist und wenn ihre Existenz einsichtig ist. Auf $\aleph$, die Menge der natürlichen Zahlen, trifft das wohl zu. Allerdings führen Prozeduren wie die, die zum Modell 17 führen, zu Aussagen über natürliche Zahlen – und das kann weit weg von der intendierten Interpretation, der Absicht des Sprechers sein. Zum anderen sollten also Interpretationen gefunden werden, die nicht sehr fern der beabsichtigten Interpretation der Sprecher sind.

Im folgenden wird in einigen Schritten eine Interpretation aufgebaut, die gewisse Antworten auf die oben formulierten Fragen und Bedenken gibt. Dabei wird

[15] Im konkreten Fall (Definition 17) war dies der Bereich der Natürlichen Zahlen $\aleph$. Zur Erinnerung: Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie endlich ist oder gleichmächtig der Menge $\aleph$.

sich zeigen, daß ein geschlossener Satz (eine Aussage ohne freie Variablen) genau dann logisch wahr in der üblichen, der referentiellen Semantik ist, wenn er dies auch in der aufzubauenden substitutionellen Semantik ist. Diese formale Gleichwertigkeit bezieht sich auch auf den Begriff der logischen Folgebeziehung. Zunächst wird zur Erinnerung der Begriff eines Modells eingeführt:

> Ein Modell $\mathcal{M}$ für eine Sprache $\mathcal{L}$ ist ein Paar $\langle \mathbb{D}, \mathcal{I} \rangle$, für das gilt:
> $\mathbb{D}$ ist eine nichtleere Menge, der Interpretationsbereich; und
> $\mathcal{I}$ ist eine Funktion, die jeder Konstanten von $\mathcal{L}$ ein Element von $\mathbb{D}$ (im Falle der Individuenkonstanten) oder eine Menge von n-Tupeln von Elementen von $\mathbb{D}$ (im Falle der Prädikatenkonstanten) zuschreibt.

Die Belegungsfunktion ν tut das Gleiche für die Individuenvariablen, was $\mathcal{I}$ für die Individuenkonstanten tut. Die hier allein interessierende Bedingung ist die für den Quantor:

> Eine Allaussage ist wahr in einem Modell unter einer Belegung für die freien Variablen, wenn jede Belegung, die höchstens im Wert für die quantifizierte Variable von der Ausgangsbelegung differiert, die Formel im Wirkungsbereich des Quantors wahr im Modell werden läßt.[16]

In der Metasprache für $\mathcal{L}$, in der die Bedingung formuliert wird, wird *über alle Belegungen* quantifiziert. In einem ersten Schritt sollen die Bedingungen nun so abgewendet werden, daß ein neues Prinzip zur Geltung kommt:

> Eine Allaussage ist genau dann wahr in einem Modell, wenn im Modell jede Formel wahr ist, die sich durch Einsetzung einer Individuenkonstanten in den Wirkungsbereich des Quantors ergibt.

Den Unterschied zwischen beiden Prinzipien erkennt man, wenn die Formelmenge $\mathbf{S} = \{f(i_1), f(i_2, \ldots, f(i_n), \ldots, {\sim}\forall j f(j)\}$ für *alle* in $\mathcal{L}$ vorkommenden Individuenkonstanten i daraufhin überprüft wird, ob sie wahr in einem Modell sein kann.[17] Nach dem referentiellen Prinzip gibt es durchaus Modelle, in denen alle Sätze aus $\mathbf{S}$ wahr sind. Dazu ist es lediglich notwendig, daß es im Modell ein einziges durch die Konstanten nicht benanntes Element d gibt. Die Interpretation

[16] Oder einfacher: „Alle s sind P“ ist wahr, wenn P wahr für jeden möglichen Wert von s ist. Vergleiche die Definition 5.

[17] Mengen wie $\mathbf{S}$ werden auch ω-*widersprüchlich* genannt.

der Individuenkonstanten ist dann so zu wählen, daß $\mathcal{M} \models f(i)$ für alle Individuenkonstanten i und $\nu_j(j) \notin \mathcal{I}(f)$ – alle Instanzen der Allaussage sind wahr, aber für ein unbenanntes Objekt wird festgehalten, daß es nicht unter die Interpretation der Prädikatenkonstanten f fällt. Nach dem substitutionellen Prinzip kann es solche Modelle nicht geben, denn wenn alle mit Konstanten gebildeten Instanzen den Wert wahr haben, ist auch die Allaussage wahr und ihre Negation macht $\mathbf{S}$ widersprüchlich – die Menge hat kein Modell.

Beispiel 27
Angenommen, die Satzmenge $\mathbf{S}^\mathbf{B}$ besteht aus den Sätzen:

Rom ist bewohnt.

Madrid ist bewohnt.

$\vdots$

Budapest ist bewohnt.

$\vdots$

Nicht alle Hauptstädte sind bewohnt.

Angenommen, es sind alle Namen von Hauptstädten aufgeführt, dann ist die Menge substitutionell widersprüchlich, denn die Wahrheit der Sätze über die einzelnen Hauptstädte erzwingt die Wahrheit von „Alle Hauptstädte sind bewohnt“. Referentiell könnte $\mathbf{S}^\mathbf{B}$ wahr sein – nämlich, falls es eine unbenannte und unbewohnte Hauptstadt gäbe.[18]

2.4.1 Ein passendes axiomatisches System

Mit dem Verzicht auf die Belegungen besteht in einer Substitutionsinterpretation kein Bedarf mehr, offene Formeln – das sind Formeln mit freien Variablen – überhaupt zu bewerten. Eine offene Formel $f(j)$ mit der freien Variablen j ist ja auch nicht an und für sich wahr oder falsch (in einem Modell), sondern lediglich wahr oder falsch für eine gewisse Belegung von j. In diesem Lichte erscheint es vernünftig, die Axiomatik gleich so aufzubauen, daß nur geschlossene Formeln,

[18] Klar, daß ich den Namen hier nicht angeben kann.

Formeln ohne freie Variablen, als Theoreme im System auftreten können. Ein solches System wird in der folgenden Definition[19] festgelegt:

Definition 24
Seien $t, t_1, \dots$ Metazeichen für Individuenkonstanten. Axiome von $\mathbf{FOL_s}$ *sind alle geschlossenen Formeln der folgenden Form:*

$\mathbf{A1_S}$	$A \supset (A \wedge A)$
$\mathbf{A2_S}$	$(A \wedge B) \supset A$
$\mathbf{A3_S}$	$(A \supset B) \supset ({\sim}(B \wedge C) \supset {\sim}(C \wedge A))$
$\mathbf{A4_S}$	$A \supset \forall i A$
$\mathbf{A5_S}$	$\forall i A \supset A\|\,^{i}_{t}$
$\mathbf{A6_S}$	$\forall i(A \supset B) \supset (\forall i A \supset \forall i B)$

sowie die der Form $\forall i A|\,^{t}_{i}$ für alle Axiome A.[20]

Die einzige Schlußregel ist die Abtrennungsregel

MP

$$\frac{\begin{array}{c} A \supset B \\ A \end{array}}{B}$$

Die Begriffe „Theorem", „Beweis" und „Beweis aus Annahmen (Ableitung)" werden auf die übliche Weise verstanden.

Um später behaupten zu können, daß die Substitutionssemantik eine für die Prädikatenlogik ist, muß zunächst sichergestellt werden, daß es sich bei dem in Definition 24 vorgestellten System um die gleiche Logik handelt, wie die aus Abschnitt 1.2.1 **FOL**. Das ist problematisch in zweierlei Hinsicht: Einerseits sind sie in verschiedenen Sprachen formuliert, andererseits erlaubt ein System das Beweisen offener Formeln, das andere aber nicht.

Die Lösung für das erste Problem ist bereits in Abschnitt 2.1.2 bei der Rechtfertigung der Regeln des natürlichen Schließens angesprochen worden[21]. Da die Sprache von $\mathbf{FOL_s}$ die von **FOL** einschließt, kann man leicht überprüfen, ob –

[19] Auf die Rechtfertigung für das in der Terminologie „$\sim$, $\supset$, $\wedge$, $\forall$ formulierte System – es stammt aus [17] – und die Frage, warum es dem im Kapitel 1 formulierten gleichwertig ist, wird noch eingegangen.

[20] Da es sich um geschlossene Formeln handelt, kommt in $\mathbf{A4_S}$ die Variable i in A nicht frei vor!

[21] Vergleiche auch Fußnote 6 auf Seite 64.

unter vorläufiger Vernachlässigung der Frage nach den offenen Formeln – jedes Axiom und jede Regel aus letzterem System im ersterem beweisbar sind. Umgekehrt beweist man nicht die Axiome von **FOL**$_{\mathrm{S}}$ in **FOL**, sondern deren Übersetzung in die engere Sprache. Benutzt wird dabei selbstverständlich die Definition $A \wedge B \ =_{dfn} \ {\sim}(A \supset {\sim}B)$.

Es bleibt die Frage zu klären, wie mit Axiomen aus **FOL** zu verfahren ist, die freie Variablen enthalten. Die semantischen Bedingungen für den Allquantor und der Satz 3 erlauben jeweils eine Strategie: Da eine Formel mit einer freien Variablen dann und nur dann eine Tautologie ist, wenn ihre Generalisierung eine ist, und da **FOL** nachweislich vollständig ist, kann man anstelle der Axiome von **FOL** deren allquantifizierte Generalisierung in **FOL**$_{\mathrm{S}}$ beweisen. Da eine Formel mit einer freien Variablen dann und nur dann in einem Modell unter einer Belegung wahr ist, wenn es ein Modell gibt, welches das Resultat der Ersetzung der freien Variablen in der Formel durch eine neue Konstante wahr werden läßt, und da **FOL** nachweislich vollständig ist, kann man eine solche geschlossene Formel mit einer beliebigen neuen Konstanten anstelle der Variablen in **FOL**$_{\mathrm{S}}$ beweisen. Es wird also benutzt:

Wenn $\vdash_{\mathbf{FOL}} \forall i A$, so $\vdash_{\mathbf{FOL}} A$.

Wenn $\vdash_{\mathbf{FOL}} A|\,^{i}_{j}$, so $\vdash_{\mathbf{FOL}} A$.

Die Beweise werden hier nicht ausgeführt, sie sind – selbst unter Verwendung des Deduktionstheorems – langwierig, jedoch herkömmlich.

2.4.2 Henkin-Modelle

Das beschriebene axiomatische System bekommt nun eine semantische Beschreibung. Im nächsten Schritt werden die Modelle auf solche beschränkt, in denen jedes Objekt einen Namen in der Sprache hat. Das ist, wie mehrfach erläutert wurde, nicht generell der Fall – im Gegenteil ist es wohl auch in den allermeisten praktischen Fällen so, daß es sehr viel mehr unbenannte Gegenstände gibt, als solche mit Namen. Wenn jeder Gegenstand aus dem Interpretationsbereich einen Namen hat, dann heißt das, daß im Wertebereich der Interpretationsfunktion alle Elemente des Interpretationsbereiches sind:

Definition 25
Eine Interpretationsfunktion $\mathcal{I}$ heißt Henkin-Interpretationsfunktion, wenn gilt:

> *Für alle Elemente d_j aus dem Interpretationsbereich $\mathbb{D}$ gibt es eine Individuenkonstante t_i derart, daß* $\quad \mathcal{I}(t_i) = d_j$.

Ein Modell heißt Henkin-Modell, wenn die Interpretationsfunktion eine Henkin-Interpretationsfunktion ist.

Eine erste wichtige Beobachtung bezüglich der Henkin-Modelle bezieht sich auf die Größe der Interpretationsbereiche: Da die Anzahl der Individuenkonstanten in den Sprachen der klassischen Prädikatenlogik höchsten abzählbar groß ist[22] und da jedes Element des Interpretationsbereiches Wert der Interpretationsfunktion für irgend eine Individuenkonstante ist, sind die Interpretationsbereiche der Henkin-Modelle ebenfalls höchstens abzählbar unendlich groß. Man kann in einem Henkin-Modell mehr Namen als Dinge, aber nicht mehr Dinge als Namen haben. Dies zeigt sofort, daß es mehr Modelle als Henkin-Modelle gibt.

Beispiel 28
Ein Beispiel für ein Henkin-Modell ist oben unter 25 beschrieben und benutzt worden: Die Sprache $\mathfrak{L}$ enthält (unter anderem) die Individuenkonstanten $\underline{\mathbf{1}}$, $\underline{\mathbf{2}}$, ..., $\underline{\mathbf{113}}$, ..., die von der Interpretationsfunktion auf die natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 113, ... *abgebildet werden. Jede natürliche Zahl hat in dieser Sprache auch einen Namen.*

Auch das Modell aus Definition 17 ist als Henkin-Modell konstruierbar, alle Konstanten werden als bestimmte natürliche Zahlen interpretiert und weiter werden keine Elemente im Interpretationsbereich zugelassen. Die Interpretationsfunktion ist genau die Funktion, die die Numerierung der Konstanten erledigt.

Die beiden erwähnten Beispiele unterscheiden sich in einem Punkt ganz wesentlich. Im ersten Beispiel werden die Namen der natürlichen Zahlen $\underline{\mathbf{n}}$ mit $\underline{\mathbf{n}} \in \{\text{Menge der Individuenkonstanten}\}$ als natürliche Zahlen n mit $n \in \aleph$ interpretiert – das ist die *intendierte Interpretation*, die die Zahlzeichen eben haben. Im zweiten Beispiel wurden beliebige Konstanten als Zahlen interpretiert, und Aussagen, die in der beabsichtigten, intendierten Interpretation Aussagen über Ereignisse oder Menschen oder Elementarteilchen ... waren, wurden zu Aussagen über Zahlen. *Dies* Verfahren, die Konstanten in $\aleph$ zu interpretieren, gibt Aussagen zwar ein abzählbares Modell, aber kein besonders intuitives. Der Schritt zu einem intuitiveren wird mit der nächsten Definition unternommen:

---

[22] Man muß sich nicht auf solche Sprachen beschränken. Allerdings gibt es gute Gründe, sich auf solche Sprachen zu beschränken, in erster Linie wegen der endlichen Beschreibbarkeit abzählbarer Sprachen.

Definition 26
Ein Modell $\mathcal{M}^K = \langle \mathbb{D}, \mathcal{I} \rangle$ *ist genau dann ein Konstantenmodell, wenn gilt:*

$\mathbb{D}$ *ist die Menge der Individuenkonstanten;*

$\mathcal{I}(t) = t$ *für alle Individuenkonstanten* t.

Da die Menge der Individuenkonstanten höchstens abzählbar unendlich groß ist, ist ein Konstantenmodell ein Henkin-Modell. Während in der Sprache mit Hilfe der Namen über Gegenstände gesprochen wird, werden diese Sätze in der Semantik als Behauptungen über die Namen selbst interpretiert: „London ist schön" in einem Konstantenmodell genau dann, wenn die Konstante „London" (der Name, das Wort) in den Interpretationswert von „schön" fällt. Was könnte das für ein Interpretationswert sein? Es ist, ganz offensichtlich, die Menge der Namen, die schöne Gegenstände bezeichnen sollen. Die vorkommenden Mengen sind abzählbar und Mengen von Ausdrücken – Entitäten also, deren Konstruktion und Existenz ganz im Belieben der Sprachnutzer liegt.[23] Tatsächlich läßt sich auf diese Weise eine andere Perspektive auf die oben aufgeworfenen Implikationen und Voraussetzungen gewinnen:

- Während in einer referentiellen Semantik beliebige Modelle und damit auch beliebige Mengen eine Rolle spielen, nutzen die Konstantenmodelle nur abzählbare Mengen von sprachlichen Ausdrücken. Man kann wohl mit gutem Gewissen von der Harmlosigkeit der Menge der Individuenkonstanten einer Sprache ausgehen, da man gerade bei der Festlegung der Sprache diese Ausdrücke spezifiziert hat.

- Während nicht völlig klar ist, warum denn eigentlich der Interpretationsbereich referentieller Semantiken nichtleer sein muß – es handelt sich um eine technische *ad hoc*-Forderung, lautet die Kritik –, ist das für die Konstantensemantiken ganz klar: Da die Konstanten die Elemente der Individuenbereiche sind, gäbe es nichts zu interpretieren, wäre der Bereich leer.

- Während die Forderung, daß jede Individuenkonstante interpretiert sein muß, eine spezielle Bedingung in einer referentiellen Semantik ist, ergibt sich dies in einem Konstantenmodell ganz von selbst. Mehr noch, die Art und

[23] Selbstverständlich nicht im Belieben jedes einzelnen beliebigen Sprechers, man hat sich schließlich an überkommene Regeln und Traditionen zu halten und Veränderungen geschehen als Veränderungen in einer größeren Gruppe.

Weise der Interpretation legt eine akzeptable Möglichkeit nahe, auch leere Termini zu verwenden: Individuenkonstanten haben *die Aufgabe*, Dinge zu bezeichnen. Das reich hin, um sie zu Termini (bestimmter Art) zu machen. Ob sie diese Aufgabe auch erfüllen, ist eine kontingente, logisch nicht interessierende Tatsache. „Pegasus kann fliegen" ist wahr in einem Konstantenmodell, wenn der Ausdruck „Pegasus" unter die Ausdrücke fällt, die fliegendes bezeichnen sollen – völlig unabhängig davon, ob es Pegasus gibt oder nicht. Es kann gute Gründe dafür geben, daß dies so ist (beispielsweise, weil man sich auf die Definition *Pegasus* $=_{\texttt{dfn}}$ *das einzige Pferd, was fliegen kann* eingelassen hat). Es kann auch gute Gründe dafür geben, daß die Aussage nicht wahr ist (beispielsweise, weil der Name nichts fliegendes bezeichnen soll, da es so etwas nicht gibt.).

- Während viele Autoren die referentiellen Semantiken in der Nähe einer korrespondenztheoretischen Wahrheitskonzeption sehen, können die Rechtfertigungen dafür, warum ein Name in einer bestimmten Menge von Ausdrücken vorkommt oder nicht, ganz unterschiedlicher Art sein. Dies ermöglicht eine einfachere Justierung der Verbindungen zwischen Logik und Erkenntnistheorie.

Nicht erwähnt wurde der Satz von Löwenheim/Skolem darüber, daß es für alle konsistenten Mengen ein abzählbares Modell gibt. Dieser ergab sich beim Beweis der Vollständigkeit. Natürlich ist mit dem reinen Aufzeigen, daß es Konstantenmodelle gibt, nicht gezeigt, daß alle konsistenten Mengen ein Konstantenmodell haben, welches den Beweis der Vollständigkeit garantiert.

2.4.3 Anpassen des Modells

Der mehrfach erwähnte Vollständigkeitsbeweis verlief in mehreren Schritten:

1. Jede konsistente Menge läßt sich zu einer maximal konsistenten ω-vollständigen Menge erweitern.

2. Jede maximal konsistente ω-vollständige Menge hat ein Modell.

3. Also ist eine Menge genau dann konsistent, wenn sie ein Modell hat.

4. Wenn $\mathbf{K} \models A$, dann ist $\mathbf{K} \cup \{\sim A\}$ inkonsistent, dann gilt $\mathbf{K} \cup \{\sim A\} \vdash B \wedge \sim B$ und also $\mathbf{K} \vdash A$.

Die offenen Fragen für die Henkin-(Konstanten)-Modelle, für eine substitutionelle Interpretation der Quantoren lassen sich nun auf zwei reduzieren: Lassen sich alle Formelmengen zu maximal konsistenten und ω-vollständigen Mengen erweitern? Es wird sich zeigen, daß das nicht ohne weiteres möglich ist. Und weiter, kann man für solche Mengen dann ein Henkin-(Konstanten)-Modell finden? Hier ist die Antwort dann problemlos und positiv. Da es sich nicht schwer zeigen läßt, daß Formelmengen mit einem Henkin-Modell konsistent sind, sind die letzten beiden Schritte dann wie im Beweis im ersten Kapitel.

Tatsächlich läßt sich nicht jede konsistente Formelmenge in einer vorgegebenen Sprache $\mathcal{L}$ zu einer ω-vollständigen Menge erweitern: Eine Formelmenge heißt ω-vollständig, wenn sie zu jeder Formel der Form $\sim\forall iA$ eine Formel $\sim A|\,^i_t$ enthält. Die Erweiterung wurde im Originalbeweis so durchgeführt, daß alle Formeln einer gewissen Erweiterungsstufe nacheinander durchmustert wurden und – um Kollisionen zu vermeiden – beim Auffinden einer negierten Allaussage eine entsprechende negierte Substitutionsinstanz *mit einer neuen Konstanten* zur Menge hinzugefügt wurde. Es war wesentlich, daß es sich um eine neue Individuenkonstante handelt, da in der Menge unter Umständen schon alle vorhandenen Konstanten mit Aussagen $A|\,^i_{t'}$ enthalten sind. Für referentielle Semantiken kann man einfach beliebig viele Konstanten zur Sprache hinzufügen.

Ein erster Versuch, die Quantorenregel für die substitutionelle Semantik zu fassen, ist in folgendem – *nicht endgültigem* – Vorschlag expliziert:

$*$ $M^K \models_S \forall iA$ genau dann, wenn $M^K \models_S A|\,^i_t$ für alle Individuenkonstanten t der Sprache $\mathcal{L}$.

Offene Formeln werden nicht bewertet, die anderen Interpretationsregeln sind die gleichen wie in der vorgestellten Referenzsemantik (mit dem Verweis auf ein Konstantenmodell anstelle eines beliebigen Modells). Die Definition einer Folgebeziehung sei die übliche.

Diese Konstruktion ergibt noch nicht eine Semantik für die klassische Prädikatenlogik. Angenommen, eine Menge $\mathbf{K}$ bestehe aus allen Konstanteninstanzen in eine Formel $f(i)$ und der Formel $\sim\forall if(i)$: $\mathbf{K} = \{f(t), f(t_1), \ldots, \sim\forall if(i)\}$. Dann gilt offenbar für die Folgebeziehung:

$$\mathbf{K} \models_S \forall if(i)$$

denn jedes M^K, welches all die atomaren Formeln wahr werden läßt, läßt nach $*$ auch die Allaussage wahr werden. Es gilt jedoch nicht

$$\mathbf{K} \vdash_S \forall if(i)$$

für die Ableitbarkeitsbeziehung, denn diese ist so definiert, daß es eine *endliche* Untermenge $\mathbf{K}'$ von $\mathbf{K}$ geben muß, so daß

$$\mathbf{K}' \vdash_S \forall i f(i)$$

Würde dies gelten, würde es im System eine Regel geben, nach der bereits aus einer endlichen Anzahl von Beispielfällen auf eine Allaussage geschlossen werden kann. Die Menge $\mathbf{K}$ hat also kein Modell, ist aber auch nicht inkonsistent! Man kann die Menge auch nicht ohne weiteres zu einer ω-vollständigen *konsistenten* Menge erweitern, denn das Hinzufügen eines Zeugen $\sim f(i)|^{i}_{t'}$ für $\sim\forall i f(i)$ unter Benutzung einer in der Sprache vorhandenen Konstanten würde die Menge inkonsistent werden lassen. Neue Konstanten stehen aber bei weitem nicht so selbstverständlich zur Verfügung, wie in einer referentiellen Semantik. In letzterer sind Synonyme erlaubt und die Erweiterung der Sprache kann geschehen, ohne daß man den Interpretationsbereich verändert. Für eine Konstantensemantik ist das offenbar ganz anders.

Der Trick besteht nun darin, die Menge $\mathbf{K}$ auf dem Hintergrund einer erweiterten Sprachen $\mathcal{L}^+$ zu betrachten, die sich im konkreten Fall von $\mathcal{L}$ nur im Vorhandensein einer neuen, $\mathbf{K}$-fremden Konstanten t^+ unterscheidet. Die Idee ist also:

$**$ $\mathbf{K} \models_S \forall i f(i)$ in einer Sprache $\mathcal{L}$ genau dann, wenn $\mathbf{K} \models_S f(i)|^{i}_{t}$ für alle Konstanten einer Sprache $\mathcal{L}^+$.

Mit dieser noch zu verallgemeinernden Idee gilt $\mathbf{K} \models_S \forall i f(i)$ ganz offenbar nicht und $\mathbf{K}$ ist in $\mathcal{L}^+$ auch durch einen Zeugen für die negierte Allaussage konsistent erweiterbar.

Da sich das zu beweisende Lemma – daß sich nämlich jede konsistente Formelmenge zu einer maximal konsistenten ω-vollständigen erweitern läßt – auf beliebige Mengen von Formeln bezieht, werden unendlich viele Konstanten zur Sprache $\mathcal{L}$ hinzugefügt.

Lemma 25
Sei $\mathbf{K}$ eine beliebige Menge geschlossener Formeln aus $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^\infty$ sei $\mathcal{L}$, erweitert um eine unendliche Menge von neuen Individuenkonstanten. Dann läßt sich $\mathbf{K}$ zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen Menge $\mathbf{K}^\omega$ in der Sprache $\mathcal{L}^\infty$ erweitern.

Sowohl die Definitionen als auch der Beweis verlaufen so, wie in der Definition 16 und in den anschließenden Lemmata beschrieben. In jeweils aufeinanderfolgenden Schleifen werden die Mengen konsistent erweitert, ω-vervollständigt, wiederum konsistent erweitert, ω-vervollständigt ... und die Vereinigungsmenge über alle Prozesse ist $\mathbf{K}^\omega$.

Kapitel 3

Theorien und Paradoxien

3.1 Theorien

Im Abschnitt 2.1.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß man die Prädikatenlogik um *inhaltliche* Axiome konsistent erweitern kann. Unter einer Theorie versteht man in der Logik eine Menge von Sätzen und eine Möglichkeit, eine Theorie zu fixieren, ist es, Axiome anzugeben, aus denen die Sätze der Theorie und nur diese alle ableitbar sind.

3.2 Traditionelle Logik

Im folgenden soll die auf Aristoteles zurückgehende[1] traditionelle Logik vorgestellt werden. Wie sich zeigen wird, läßt sie sich als eine prädikatenlogische Theorie auffassen. Ausgangspunkt ist eine neue Sprache – die traditionelle Logik beschäftigt sich mit Urteilen in der Subjekt-Prädikat-Form, wobei die vorkommenden Termini jeweils generelle Subjekttermini (Art- und Gattungsbegriffe) sind.

3.2.1 Kategorische Urteile

In der traditionellen Logik geht man davon aus, daß neben den quantifizierenden Ausdrücken „alle“ und „einige“ und der Prädikation „zukommen“ sowie der Negation „nicht“ *Begriffe* die Grundbausteine der Sprache sind. Begriffe sind Termi-

[1] Aristoteles gilt als der Begründer der traditionellen Logik (und der Logik überhaupt), die hier gewählte Darstellung bezieht aber eine ganze Reihe von Elementen mit ein, die seine Nachfolger und insbesondere Logiker des Mittelalters und sogar der angehenden Neuzeit eingebracht haben.

ni, die mehreres auf eine bestimmte Weise bezeichnen sollen. Aristoteles verwendet in seinen Schlüssen ausschließlich Begriffe, die einen Ober- und einen Unterbegriff haben, keine leeren Termini, keine Namen und keine kategorialen Termini. Hintergrund ist, daß man sowohl etwas vom Bezeichneten aussagen können soll, als auch es zum Aussagen über etwas benutzen.[2] Begriffe haben einen Inhalt, der gewöhnlich mit einer Information über das Bezeichnete oder der Weise des Bezeichnens oder einer Ansammlung von notwendigen Eigenschaften des Bezeichneten assoziiert wird (die „Merkmale"), und einen Umfang, der üblicherweise mit der Anhäufung oder der Menge der bezeichneten Gegenstände in Zusammenhang gebracht wird. „Inhalt" und „Umfang" sind Freges „Sinn" und „Bedeutung" und Carnaps „Intension" und „Extension" verwandt und durch das sogenannte Gesetz vom umgekehrten Verhältnis von Inhalt und Umfang miteinander verbunden. Es besagt, daß von zwei Begriffen mit vergleichbaren Inhalten und Umfängen der mit dem größeren Umfang den kleineren Inhalt hat und umgekehrt.

Beispiel 29 *Die Begriffe „Grieche" und „Mensch" haben korrelierte Inhalte und Umfänge:*

	Umfang	*Inhalt*
„Grieche"	*alle Griechen*	*vernunftbegabte Lebewesen griechischer Nationalität*
„Mensch"	*alle Menschen*	*vernunftbegabte Lebewesen*

Von den Griechen kann man aussagen, daß sie Menschen sind und daß sie Griechen sind, kann man von den Athenern aussagen. Von Menschen kann ausgesagt werden, daß sie vernunftbegabt sind.

Der erste Begriff verweist erkennbar auf mehr Eigenschaften (hat einen größeren Inhalt), es gibt jedoch weniger Griechen als Menschen (er hat einen kleineren Umfang). Prädikate wie „denken" werden mit Hilfe genereller Subjekttermini wie „Denkender", „Denkende", „Denkendes" expliziert.

Kategorische Aussagen verbinden einen Subjekt- und einen Prädikatterminus mit Hilfe der Prädikation und unterscheiden sich der Quantität (alle oder einige) und der Qualität (unnegiert oder negiert) nach. Mit P und S (für „Prädikat" und

[2]Der „Trick" ist nötig, wie weiter unten (vergleiche Abschnitt 3.2.3) klarwerden wird, weil mindestens ein Terminus in den Syllogismen seine logische Rolle unabhängig von der grammatischen Position spielen muß. Er tritt, modern gesprochen, grammatisch in Subjekt- und Prädikatposition auf. In der Prädikatenlogik kann das nicht geschehen, die Interpretation einer Individuenkonstanten ist ein *Gegenstand* aus dem Interpretationsbereich, die einer Prädikatenkonstanten ist eine *Menge*.

„Subjekt") werden in den folgenden Satzschemata Leerstellen für Termini der beschriebenen Art bezeichnet, sie funktionieren wie Variable:

P kommt allen S zu	(allgemein-behauptend)	SaP
P kommt einigen S zu	(partikulär-behauptend)	SiP
P kommt keinem S zu	(allgemein-verneinend)	SeP
P kommt einigen S nicht zu	(partikulär-verneinend)	SoP

Tabelle 3.1: Die kategorischen Urteile

Die Sätze werden häufig „Alle S sind P", ..., „Einige S sind nicht P" gelesen. Da „ist" und „sind" mehrdeutig sind[3], wurde die auch von Aristoteles benutzte korrekte prädikative Formulierung verwendet. Die in der dritten Spalte verwendeten Kurzformen mit den Vokalen in der Mitte erlauben eine kompakte Darstellung, die Bezeichnungen gehen auf die ersten Vokale in den Worten „*a*ff*i*rmo" und „n*e*g*o*" zurück.

Es gibt Standardübersetzungen für die kategorischen Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik. Der Einfachheit halber werden die gleichen Zeichen S und P in diesem Abschnitt auch für (einstellige) Prädikatenkonstanten einer entsprechenden Sprache erster Stufe verwendet:

	Übersetzung
SaP	$\forall x(S(x) \supset P(x))$
SiP	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$
SeP	$\sim\exists x(S(x) \wedge P(x))$
SoP	$\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$

Tabelle 3.2: Übersetzungen der kategorischen Urteile

3.2.2 Das logische Quadrat

Die kategorischen Aussagen lassen sich an den Ecken des „logischen Quadrates" anordnen (vgl Abbildung 3.1):

[3]Die erste umfassende Untersuchung der Aristotelischen Syllogistik mit modernen Mitteln wurde von Jan Łukasiewicz unternommen. Der weist auf Aristoteles' ursprüngliche Formulierung hin.

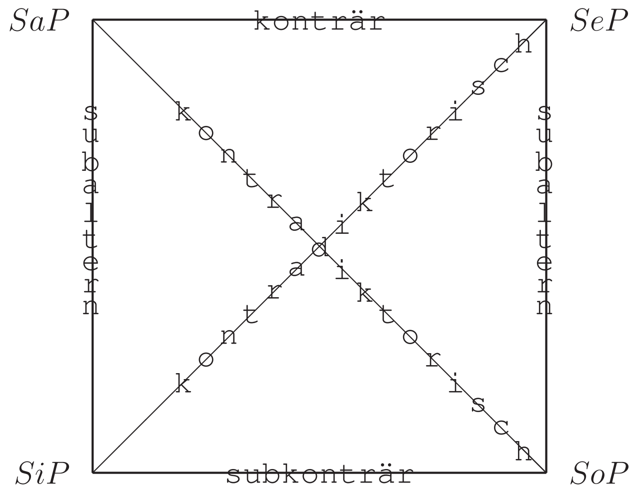


Abbildung 3.1: Das logische Quadrat

Die Schlüsse entlang dem logischen Quadrat werden durch die Relationen entlang den Seiten und Diagonalen des Quadrates ermöglicht: Generelle Aussagen sind einander konträr, können also nicht gemeinsam wahr sein; partikuläre Aussagen sind einander subkonträr, können also nicht gemeinsam falsch sein; und aus der generellen (positiven beziehungsweise negativen) Aussage folgt die entsprechende partikuläre Aussage, während sie zur entgegengesetzten (negativen beziehungsweise positiven) partikulären Aussage kontradiktorisch ist.

Daß dem unter den beschriebenen Voraussetzungen tatsächlich so ist, kann man sich leicht an einigen Beispielen klarmachen. Warum ist das aber so? Eine einfache Möglichkeit zum Überprüfen solcher Schlüsse stellen Diagramme dar, in denen die Umfänge der vorkommenden Termini durch Kreise dargestellt werden. Die Begriffsumfänge zweier genereller Termini S und P können sich wie in Abbildung 3.2 prinzipiell auf fünf verschiedene Weisen zueinander verhalten.

Die kategorischen Aussagen können nun daraufhin überprüft werden, in welchen der Verteilungen sie wahr sind. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle darge-

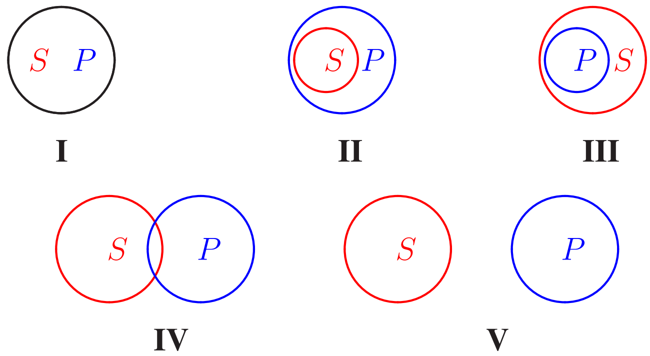


Abbildung 3.2: Venn-Diagramme für zwei generelle Termini

stellt[4]:

	I	II	III	IV	V
SaP	+	+	–	–	–
SiP	+	+	+	+	–
SeP	–	–	–	–	+
SoP	–	–	+	+	+

Tabelle 3.3: In welchen Diagrammen sind die kategorischen Urteile wahr?

Die erste Zeile – und die anderen entsprechend – sollte dann so gelesen werden: Wenn die Umfänge von S und P zusammenfallen oder der von S ganz im Umfang von P ist (und nur dann), dann ist SaP wahr. Die Schlüsse des logischen Quadrates sind jetzt unmittelbar abzulesen. Hier sind einige Beispiele:

- Wenn SaP, so SiP – denn alle Spalten mit einem „+“ in der ersten Zeile haben auch eines in der zweiten. ($SaP \supset SiP$)

- SiP genau dann, wenn nicht SeP – denn alle Spalten mit einem „+“ in der zweiten Zeile, haben ein „–“ in der dritten, und umgekehrt. ($SiP \equiv \sim SeP$)

[4]Falls ein Leser zwei Varianten vermißt – da die Termini erfüllt sein müssen, dürfen weder S noch P leer sein.

- SiP und SoP können nicht beide falsch, aber wohl beide wahr sein – denn es gibt keine Spalte mit einem „–“ in der zweiten und in der vierten Spalte (aber solche mit „+“ in beiden Zeilen). ($\sim(\sim SiP \wedge \sim SoP)$)

Die Schlüsse des logischen Quadrates gehören zu den sogenannten unmittelbaren Schlüssen, aus einer Voraussetzung wird auf eine Folge geschlossen. Aristoteles, und dann viele Jahrhunderte nach ihm die meisten Logiker, haben sich bevorzugt mit bestimmten Schlüssen aus zwei Prämissen beschäftigt, den Syllogismen.

3.2.3 Der Syllogismus

Ein Syllogismus ist ein Schluß auf eine kategorische Aussage aus zwei kategorischen Aussagen, bei dem drei Termini eine Rolle spielen. Der mittlere Terminus – hier mit M bezeichnet – kommt in den Prämissen, aber nicht in der Konklusion vor. Heute werden Syllogismen in der Regel als Schlußregeln aufgefaßt und aufgeschrieben, und eine erste Systematisierung der Syllogismen geschieht nach der Stellung des mittleren Terminus. Dabei wird die Prämisse, die neben dem mittleren Terminus das Prädikat der Konklusion enthält, als „große“ Prämisse bezeichnet und oben geschrieben. Seit dem Mittelalter werden vier Figuren unterschieden:

Erste Figur	Zweite Figur	Dritte Figur	Vierte Figur
$\dfrac{\begin{array}{cc} M & P \\ S & M \end{array}}{\begin{array}{cc} S & P \end{array}}$	$\dfrac{\begin{array}{cc} P & M \\ S & M \end{array}}{\begin{array}{cc} S & P \end{array}}$	$\dfrac{\begin{array}{cc} M & P \\ M & S \end{array}}{\begin{array}{cc} S & P \end{array}}$	$\dfrac{\begin{array}{cc} P & M \\ M & S \end{array}}{\begin{array}{cc} S & P \end{array}}$

Tabelle 3.4: Die Figuren der Syllogismen

Jeder der nur angedeuteten Sätze kann so verstanden werden, daß die entsprechenden Termini über a, e, i oder o verbunden sind – aber selbstverständlich ergibt nicht jede beliebige Kombination einen gültigen Syllogismus.

Beispiel 30 *Die erste Figur ergibt mit „a“-Verbindungen für alle Aussagen einen gültigen Syllogismus, den bekanntesten überhaupt:*

> *Allen Menschen kommt Vernuftbegabt-Sein zu.*
> *Allen Griechen kommt Mensch-Sein zu.*
> *Also kommt allen Griechen Vernunftbegabt-Sein zu.*

Einen zwingenden Schluß in der ersten Figur (und auch sonst nicht) von zwei i-Aussagen auf eine i-Aussage gibt es nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

⋆ *Einigen Reichen kommt Frau-Sein zu.*
Einigen Männern kommt Reich-Sein zu.
Also kommt einigen Männern Frau-Sein zu.

Für jede der Figuren lassen sich gültige und ungültige Kombinationen von kategorischen Aussagen finden.[5]

Es ist das Verdienst Aristoteles', an dieser Stelle die richtigen Fragen gestellt zu haben. Selbstverständlich haben Menschen auch vor Aristoteles' Arbeiten korrekt argumentiert, jedoch war Aristoteles der erste, der versucht hat, die diesem Argumentieren zugrunde liegenden Prinzipien zu systematisieren. Er hat sich gefragt:

- Welche Kombinationen von kategorischen Aussagen ergeben gültige Schlüsse in den Figuren?
- Was ist überhaupt ein gültiger Schluß?
- Gibt es Kriterien, nach denen man immer die gültigen Schlüsse erkennen kann?
- Muß man alle Schlüsse unabhängig voneinander begründen oder ist es möglich, mit einem bestimmten Grundbestand an akzeptierten Regeln alle anderen als Abkürzungen für längere und komplexe Anwendungen der Grundregeln aufzufassen? Welches sind die Grundregeln?

Verweis Regelbegruendung

Zu einigen dieser Fragen ist weiter oben bereits Stellung genommen worden, darüber hinaus ist die Geschichte der Logik hier nicht Gegenstand. Tabelle 3.5 ist eine Liste der gültigen Syllogismenformen, man nennt sie Modi, aus denen durch Einsetzen von konkreten Termini für die Terminusvariablen S, P und M jeweils gültige Syllogismen entstehen.

[5]Ob die jeweiligen Formulierungen logisch gültig sind, hängt nicht an der umgangssprachlich unzulänglichen Ausdrucksweise. In der deutschen Sprache würden die Sätze der Beispiele so nicht formuliert werden, sondern man würde beispielsweise „Alle Menschen sind vernunftbegabt" oder „Einige Männer sind Frauen" verwenden. Künftig wird das hier auch so geschehen, da in diesem Zusammenhang die Gefahr einer Verwechslung mit der Identität oder anderen Interpretation von „ist" nicht besteht.

Erste Figur	$\dfrac{MaP \quad SaM}{SaP}$	$\dfrac{MeP \quad SaM}{SeP}$	$\dfrac{MaP \quad SiM}{SiP}$	$\dfrac{MeP \quad SiM}{SoP}$	$\dfrac{MaP \quad SaM}{SiP}$	$\dfrac{MeP \quad SaM}{SoP}$
Zweite Figur	$\dfrac{PeM \quad SaM}{SeP}$	$\dfrac{PaM \quad SeM}{SeP}$	$\dfrac{PeM \quad SiM}{SoP}$	$\dfrac{PaM \quad SoM}{SoP}$	$\dfrac{PeM \quad SaM}{SoP}$	$\dfrac{PaM \quad SeM}{SoP}$
Dritte Figur	$\dfrac{MaP \quad MaS}{SiP}$	$\dfrac{MiP \quad MaS}{SiP}$	$\dfrac{MaP \quad MiS}{SiP}$	$\dfrac{MeP \quad MaS}{SoP}$	$\dfrac{MoP \quad MaS}{SoP}$	$\dfrac{MeP \quad MiS}{SoP}$
Vierte Figur	$\dfrac{PaM \quad MaS}{SiP}$	$\dfrac{PaM \quad MeS}{SeP}$	$\dfrac{PiM \quad MaS}{SiP}$	$\dfrac{PeM \quad MaS}{SoP}$	$\dfrac{PeM \quad MiS}{SoP}$	$\dfrac{PaM \quad MeS}{SoP}$

Tabelle 3.5: Die gültigen Modi

Im Mittelalter hat jeder Modus einen Kunstnamen erhalten, anhand dessen der Modus selbst zu rekonstruieren ist, der weiter sogar auch Informationen über gegenseitige Ableitbarkeiten („Rückführbarkeiten“) und andere enthält. Studenten des *Collegium Logicum* hatten zu lernen:

> *Barbara, Celarent, Darii, Ferio – que prioris*
> *Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae*
> *Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton,*
> *Bocardo, Ferison habet. Quarta insuper addit*
> *Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.*

Die vorkommenden Vokale bestimmen in ihrer Reihenfolge Quantität und Qualität der großen und der kleinen Prämisse und der Konklusion.[6] Der gültige Syllogismus in Beispiel 30 oben ist im ersten Modus der ersten Figur und der heißt *Barbara*.

Ob ein Syllogismus gültig ist, läßt sich mit Hilfe der Venn-Diagramme überprüfen – allerdings spielen nun drei Termini eine Rolle. Gültig ist ein Syllogismus, wenn bei wahren Voraussetzungen die Konklusion folgt, das heißt: nicht falsch

[6] Im Lehrgedicht kommen weniger Modi vor, als in der Tabelle oben angegeben. Das liegt daran, daß Modi, die sich aus gültigen anderen allein durch einen Schluß aus einer generellen auf eine partikuläre Aussage ergeben, nicht berücksichtigt sind.

sein kann. Zur Überprüfung werden also die Verhältnisse zwischen den drei Termini so, wie es die Prämissen vorgeben, in ein Diagramm übertragen. Danach wird versucht, eine mit „–“ in Tabelle 3.3 gekennzeichnete Diagrammstellung für die Konklusion zu finden. Ist das nicht möglich, ist der Syllogismus gültig.

Beispiel 31 *Überprüft werden soll* Felapton *(dritte Figur): Wenn MeP und MaS, so SoP. Ein Beispiel für Felapton ist der folgende Syllogismus:*

> *Kein Ereignis ist vorhersehbar.*
> *Alle Ereignisse sind determiniert.*
> *Also ist einiges Determiniertes nicht vorhersehbar.*

Da MeP gilt, fallen die Umfänge der Termini M und P komplett auseinander, nur die Spalte V enthält ein +. Da MaS gilt, fallen die Umfänge von M und S zusammen, oder der von S enthält den von M, nur die Spalten I und II enthalten ein +. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, daß der Umfang von S, so er über den von M hinausgeht, den von P ganz oder teilweise enthalten kann. Es ergeben sich also die vier Fälle aus Abbildung 3.3:

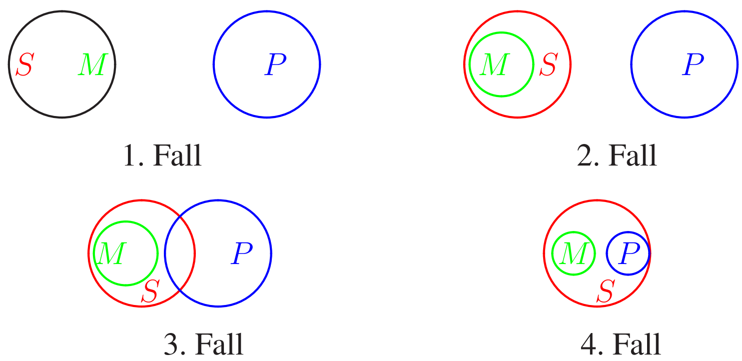


Abbildung 3.3: Felapton

Es ist unmittelbar zu sehen, daß in keinem betrachteten Fall die Umfänge von S und P zusammenfallen, oder der von S ganz in dem von P ist. Dies sind jedoch die einzigen Diagramme, bei denen SoP ein „–“ in Tabelle 3.3 hat. Also kann die partikulär-verneinende Aussage unter den gegebenen Prämissen nicht falsch werden und Felapton ist tatsächlich korrekt.

Auf die beschriebene Weise lassen sich alle oben aufgeführten Syllogismen als gültig zeigen. Es existieren weiterhin Regeln, die die gültigen Syllogismen eindeutig auszeichnen (vergleiche [5, S. 20 ff.]), jeder bestimmten Kriterien genügende Syllogismus ist gültig. Jan Łukasiewicz hat die Syllogistik auf der Basis der Aussagenlogik axiomatisiert [18].[7]

3.2.4 Traditionelle Logik und Prädikatenlogik

Daß die traditionelle Logik in gewissem Sinne ausdrucksschwächer ist als die Prädikatenlogik, ist leicht einzusehen. Aristoteles und seine Nachfolger haben sich ausschließlich mit generellen Termini beschäftigt und Aussagen mit Relationen und singulären Termini („Carnap liest sich besser als Heidegger und leichter als jeder postmoderne Autor") können nicht oder nur nach aufwendigen und nicht immer einleuchtenden Transformationen behandelt werden. Die Übersetzungsregeln aus Tabelle 3.2 erlauben es aber, alle kategorischen Urteile in der Sprache der Prädikatenlogik auszudrücken. Tatsächlich reicher als die traditionelle Logik wäre die Prädikatenlogik dann, wenn nun auch alle Schlüsse der traditionellen Logik in Übersetzung in der Prädikatenlogik gültig wären. Diese Idee einer „halben deduktiven Äquivalenz" ist in der Definition einer Einbettung gefaßt:

Definition 27
Seien $\langle \mathcal{L}_1, \mathrm{Cn}_1 \rangle$, $\langle \mathcal{L}_2, \mathrm{Cn}_2 \rangle$ *Logiken mit den Sprachen* $\mathcal{L}_i$ *und den Ableitbarkeitsbeziehungen* Cn_i*. Eine Übersetzung* $\mathbf{T}$ *aus* $\mathcal{L}_1$ *in* $\mathcal{L}_2$ *ist eine Funktion, die jeder Aussage aus* $\mathcal{L}_1$ *eine aus* $\mathcal{L}_2$ *zuschreibt. Eine Übersetzung* $\mathbf{T}$ *ist eine Einbettung, wenn gilt:*
Wenn $\mathrm{Cn}_1(\{A_1^{\mathcal{L}_1}, \ldots, A_n^{\mathcal{L}_1}\}) = B^{\mathcal{L}_1}$,
dann $\mathrm{Cn}_2(\{\mathbf{T}(A_1^{\mathcal{L}_1}), \ldots, \mathbf{T}(A_n^{\mathcal{L}_1})\}) = \mathbf{T}(B^{\mathcal{L}_1})$.

Kann man die Aristotelische traditionelle Logik in die Prädikatenlogik einbetten? Ist jeder traditionell gültige Schluß ein prädikatenlogisch gültiger? Die Beschränkung der traditionellen Logik auf nichtleere Termini, auf erfüllte generelle Termini legt eine negative Antwort nahe. Da diese Bedingung in der klassischen Logik nicht erfüllt sein muß, sie aber sicherlich irgendwo in der traditionellen Logik benutzt wird, muß sie einen Unterschied erzeugen. Und dem ist auch so.

Beispiel 32 *Daß Felapton traditionell gültig ist, ist oben nachgewiesen worden. Zunächst wird versucht, ob die Übersetzung von Felapton klassisch gültig ist.*

[7] Darüber hinaus gibt es Erweiterungen der Syllogistik, die unter anderem negative Termini, singuläre Termini oder modale Charakteristika mit einbeziehen.

Kann man also zeigen

$$\sim\exists x(M(x) \wedge P(x)), \forall x(M(x) \supset S(x)) \;\vdash\; \exists x(S(x) \wedge \sim P(x)) \;\textit{?}$$

1.	$\{1\}$	$\sim\exists x(M(x) \wedge P(x))$	MeP
2.	$\{2\}$	$\forall x(M(x) \supset S(x))$	MaS
3.	$\{1\}$	$\forall x\sim(M(x) \wedge P(x))$	*Theorem, aus 1*
4.	$\{2\}$	$M(a) \supset S(a)$	***B*** $\forall 2$
5.	$\{1\}$	$\sim(M(a) \wedge P(a))$	***B*** $\forall 3$
6.	$\{1\}$	$M(a) \supset \sim P(a)$	*Theorem, aus 5*

Offenbar sind die Schlußmöglichkeiten nun erschöpft. Würde man auf irgendeine Weise $M(a)$ erhalten, wäre das Problem gelöst. Allerdings sind die Übersetzungen beider Prämissen MeP und MaS wahr, wenn es keine Ms gibt, es gilt:

$$\forall x\sim M(x) \vdash \sim\exists x(M(x) \wedge P(x))$$
$$\forall x\sim M(x) \vdash \forall x(M(x) \supset S(x))$$

Da dies für beliebige S und P gilt, sind diese frei wählbar – unter anderem auch so, daß die Übersetzung von SoP nicht gilt. Ist $\exists x M(x)$ allerdings ein zusätzliches Postulat, kann die Ableitung leicht glücklich zu Ende geführt werden. Man setzt vor die gesamte Ableitung oben die beiden Zeilen

Ax	$\{\}$	$\exists x M(x)$	*Postulat*
0.	$\{0\}$	$M(a)$	*Hypothese*

und setzt die Ableitung fort bis zur Zeile $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$.

Eine Reihe weiterer Schlüsse der traditionellen Logik sind in der Prädikatenlogik nur gültig, wenn Existenzannahmen der beschriebenen Art getroffen werden, unter anderem der direkte Schluß aus dem generell-behauptenden auf das partikulär-behauptende Urteil. Prinzipiell ist es möglich – und es wird auch manchmal getan –, die jeweilige Existenzpräsupposition in die Übersetzung des entsprechenden Syllogismus einzubauen. Wesentlich einfacher und dem Geiste Aristoteles' entsprechend ist es, für alle verwendeten Terme die Erfülltheit zu postulieren. Das kann einfach getan werden, indem für jedes einstellige Prädikat (die sind die Entsprechungen für die generellen Termini der traditionellen Logik) ein Axiom eingeführt wird. Man tut das über ein Axiomenschema, in welchem „f“ eine Leerstelle für einstellige Prädikate ist:

Definition 28 (Traditionelle Logik)
Ein System der traditionellen Logik entsteht aus einer Prädikatenlogik erster Stufe, indem für jede einstellige Prädikatenkonstante f ein Axiom

EP $\exists i f(i)$

zu den Axiomen der Prädikatenlogik hinzugefügt wird.

Die zusätzlichen Axiome können hinzugefügt werden, weil die Menge der Formeln, die aus den neuen Axiomen folgen, konsistent ist. Sei diese Menge mit $\mathrm{Cn}($**EP**$)$ bezeichnet.

Lemma 26 $\mathrm{Cn}($***EP***$)$ *ist konsistent.*

Beweis Satz 17, auf Seite 37 bewiesen, lautet, daß konsistent zu sein bedeutet, ein Modell zu haben. Als Modell für die traditionelle Logik im Sinne von Definition 28 wird das Standardmodell mit folgender zusätzlicher Einschränkung verwendet:

Definition 29 (Traditionelle Logik, Semantik)
Für alle Interpretationen $\mathcal{I}$ von einstelligen Prädikatenkonstanten f gilt:
$\mathcal{I}(f) \neq \emptyset$

In allen diesen Modellen sind alle Sätze **EP** wahr. Alle aus **EP** implizierten Sätze sind wegen der Korrektheit und Vollständigkeit der Prädikatenlogik auch ableitbar aus **EP** und umgekehrt und $\mathrm{Cn}($**EP**$)$ ist konsistent.

Auf diese Weise sind alle Standardübersetzungen der traditionellen Schlüsse in der (um **EP** erweiterten) Prädikatenlogik gültige Ableitungen und die traditionelle Logik. Welche Logik ist nun die „bessere" Logik? Aus der Sicht der Ausdrucksstärke und der deduktiven Möglichkeiten ist die Antwort ganz einfach: Die Prädikatenlogik ist in allen Belangen der traditionellen Logik überlegen. Man kann die um **EP** erweiterte Prädikatenlogik FOL$^{\mathbf{EP}}$ als *logische Theorie nichtleerer Eigenschaften* auffassen. Es gibt allerdings nicht wenige Philosophen, die der traditionellen Logik mit Bezug auf Einfachheit und Natürlichkeit den Vorzug vor der klassischen Prädikatenlogik geben. Schließlich hat es mindestens seit der Logik von Port Royal Versuche gegeben, die Ausdrucksmöglichkeiten der traditionellen Logik zu erweitern, eine moderne Version einer Termlogik findet sich in [26]. Einige Autoren verweisen darauf, daß die Prädikatenlogik nicht alle Sätze intuitiv befriedigend behandelt. Ein Satz wie „Einige Schrauben sind rostig" würde sich intuitiv auf Schrauben beziehen, in einer prädikatenlogischen Umsetzung ($\exists x$(Schraube $(x) \wedge$ rostig(x))) wäre er jedoch „über" alle Gegenstände im Interpretationsbereich oder „über" rostige Schrauben (vergleiche beispielsweise [16, S. 175]). In der natürlichen Sprache, schreiben die Autoren, würde es keinen Interpretationsbereich geben, stattdessen würden die Quantoren mit den generellen

Termini einen neuen, bedeutungstragenden Block bilden, der auf eine Pluralität von Gegenständen verwiese. Ein solches von ihnen entwickeltes System[8] stünde in Übereinstimmung mit Aristoteles' Ideen und „[e]in formales System dessen Urteil über Schlüsse in der natürlichen Sprache mit dem übereinstimmt, was Logiker für mehr als zwei Jahrtausenden gültig gehalten haben, hat offensichtlich ein wünschenswertes Merkmal" [16, S. 192]. Hat es das? Allein weil sie lang überkommen ist, ist eine Aussage noch nicht wahr – auf der gegenteiligen Ansicht beruht ein klassischer Argumentationsfehler.

In FOL$^{\text{EP}}$ sind nicht nur Sätze beweisbar, die in der traditionellen Logik gar nicht ausdrückbar sind, sondern auch einige Sätze, deren traditionelle Äquivalente (die Ausgangsurteile der Übersetzungen) zwar wahr, aber nicht logisch gültig sind. Beispiele dafür sind die Aussagen SaS und SiS – „Philosoph kommt allen Philosophen zu" und „Philosoph kommt einigen Philosophen zu". Sie sind wahr für Aristoteles (schließlich setzt er die Existenz von Philosophen voraus), aber nicht beweisbar, weil logisch gültig nur die Syllogismen (oder Schlüsse im logischen Quadrat) selber sind. Diese haben aber die Form einer Wenn-dann-Aussage. Die Übersetzungen dieser Urteile in die Sprache der Prädikatenlogik sind tautologische (im beschriebenen Modell) und beweisbare Aussagen. Insofern ist FOL$^{\text{EP}}$ vielleicht sogar als „vollständiger mit Bezug auf kategorische Urteile" als die traditionelle Logik zu bezeichnen.

Als Theorie nichtleerer Eigenschaften hat die traditionelle Logik allerdings auch einen wesentlichen, kritischen Nachteil. Während man der Prädikatenlogik vorwerfen kann, daß sowohl Sätze wie „Alle Hexen sind weiblich" als auch „Alle Hexen sind männlich" wahr sind, kann man in FOL$^{\text{EP}}$ und äquivalenten Systemen über Hexen gar nicht mehr reden. Insbesondere der (wahre) Satz, daß es keine Hexen gibt, ist *nicht ausdrückbar* und unberücksichtigt in den Modellen aus Definition 29. Selbstverständlich kann man versuchen, leere Eigenschaften als komplexe Termini in die Sprache einzuführen und eine definitorische Äquivalenz wie

$$\text{Hexe}\ (x) \quad =_{\mathtt{dfn}} \quad \text{weiblich}\ (x) \wedge \ldots \wedge \text{zauberkräftig}\ (x)$$

zu benutzen (in der die Existenzpräsupposition nun auf die atomaren Eigenschaften im Definiens zutrifft, nicht aber auf deren Konjunktion). So oder so hat man seine Sprache mit Bezug auf das und unter Einbeziehung des faktischen Wissens darüber zu gestalten, welche Eigenschaften instantiiert sind.

[8] Lanzet und Ben-Yami weisen in ihrer Arbeit nach, das ihr System deduktiv äquivalent zu FOL$^{\text{EP}}$ ist.

3.3 Mengentheorie

Die Mengentheorie spielt sowohl in der Mathematik als auch in der Philosophie eine besondere Rolle.

3.3.1 Naive Mengentheorie und die Russellparadoxie

Die *Naive Mengentheorie* beruht auf zwei grundlegenden Ideen. Um Elemente zu einem Ganzen zu verbinden, bedarf es nach intuitivem Verständnis eines Prinzips, einer Regel, die besagt, welche Gegenstände denn nun bei der Mengenbildung eine Rolle spielen und welche „draußen“ bleiben sollen. In einer Sprache wie der, die bisher dargestellt wurde, kann man sich solche „Prinzipien“ am einfachsten als Formeln mit einer freien Variablen vorstellen. Ergibt die Einsetzung eines Terms in diese Formel eine wahre Aussage, dann gehört der entsprechende Gegenstand zur Menge, sonst nicht. Bisher wurden in allen Beispielen Ausdrücke mit einer freien Variablen so behandelt, als stünden sie für Eigenschaften.

Beispiel 33 *Bisher wurden unter anderem „ist unerwartet“ in Beispiel 1 und „ist gut“ in Beispiel 16 betrachtet. Selbstverständlich lassen sich auch komplexe Ausdrücke verwenden: „ist unerwartet und nicht gut“ sortiert, als Prinzip für die Mengenbildung verwendet, die Gegenstände in unerwartete-und-nicht-gute und solche, die das nicht sind. Besondere Prinzipien, etwas als Ganzes zu nehmen, sind: mit sich selbst identisch zu sein und nicht mit sich selbst identisch zu sein. Da alles mit sich identisch ist, nimmt man mit dem ersten Prinzip alle Gegenstände in ein Ganzes. Analog wird nichts in das Ganze genommen, wenn das kontradiktorische, zweite Prinzip zur Mengenbildung verwendet wird. In letzterer Menge ist also nichts.*

Die erste grundlegende Idee lautet:

KI Jeder Formelausdruck mit einer freien Variablen generiert eine Menge.

Die zweite Idee ist Ergebnis der Beschäftigung mit der Frage, wann Mengen denn eigentlich identisch sind. Die naheliegende Antwort (jede Menge mit sich selbst, keine mit einer anderen) reicht nicht aus, da Mengenausdrücke auf verschiedene Weise gebildet werden können und per Individuierung festgelegt werden muß, welche Ausdrücke gleich interpretiert werden sollen. Wodurch wird denn festgelegt, um welche Menge es sich gerade handelt? Es sind die Elemente, die zum entsprechenden Ganzen genommen worden sind.

Beispiel 34 *Erstbeweger zu sein und dasjenige zu sein, über welches hinaus nichts größeres gedacht werden kann sind zwei Charakteristika, die jeweils nur auf einen einzigen Gegenstand zutreffen sollen. Sofern dies der gleiche Gegenstand ist (Gott), sind die Mengen der Erstbeweger und derjenigen, über die hinaus nichts größeres gedacht werden kann, identisch. Die Menge aller Geschwister von Heidegger und die Menge der Kinder von Heideggers Eltern sind nicht identisch, da Heidegger nicht zur ersten, aber zur zweiten gehört.*

Die zweite grundlegende Idee lautet:

EI Genau dann, wenn zwei Mengen in allen Elementen übereinstimmen, sind sie identisch.

Mengen

Die Sprache der Naiven Mengentheorie ist eine prädikatenlogische Sprache mit zwei Prädikatenkonstanten M (einstellig, für „ist eine Menge") und ε (zweistellig, für „ist Element von"). Die Individuenvariablen erhalten eine Belegung in einem Individuenbereich, in dem Mengen und (bloße) Elemente, Gegenstände die keine Mengen sind, vorkommen. In dieser Sprache lassen sich die genannten Ideen als Axiome umsetzen, zusätzliche inhaltliche Postulate, die das Verhalten der beiden Prädikatenkonstanten regeln:

Definition 30
Die Naive Mengentheorie ist eine prädikatenlogische Theorie mit folgenden Axiomen:

EP $\forall i \forall j(M(i) \wedge M(j) \wedge \forall k(k \varepsilon i \equiv k \varepsilon j) \supset i = j)$*;*

KP *für alle Formeln A ein Axiom des Schemas:*
$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \varepsilon i \equiv A))$*, wobei i nicht frei in A vorkommt.*

Es gibt eine ganze Reihe von bekannten Mengen, deren Existenz über **KP** postuliert wird – einige Beispiele für die Anwendung von KP finden sich in Tabelle 3.6. Die vorkommenden freien Variablen (k) lassen sich „allquantifiziert" lesen[9].

Die ersten drei Mengen aus Tabelle 3.6 sind kaum einer Erklärung bedürftig und aus der Schulmathematik bekannt. Die leere Menge $\emptyset$ hat die nur auf den

[9] Für die Schnittmenge etwa: Für alle Mengen existiert eine Schnittmenge.

$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \mathrel{\epsilon} i \equiv \sim j \mathrel{\epsilon} k))$	die Komplementärmenge $i = \overline{k}$ zu einer Menge k, die alle Elemente enthält, die nicht in k sind, ist eine Menge
$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \mathrel{\epsilon} i \equiv (j \mathrel{\epsilon} k_1 \wedge j \mathrel{\epsilon} k_2)))$	die Schnittmenge $i = k_1 \cap k_2$ zweier Mengen k_1 und k_2, die alle Elemente enthält, die sowohl in k_1 als auch in k_2 sind, ist eine Menge
$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \mathrel{\epsilon} i \equiv (j \mathrel{\epsilon} k_1 \vee j \mathrel{\epsilon} k_2)))$	die Vereinigungsmenge $i = k_1 \cup k_2$ zweier Mengen k_1 und k_2, die alle Elemente enthält, die in k_1 oder in k_2 sind, ist eine Menge
$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \mathrel{\epsilon} i \equiv \sim j = j))$	die leere Menge $i = \emptyset$, die keine Elemente enthält
$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \mathrel{\epsilon} i \equiv j \mathrel{\epsilon} j))$	die Menge $i = \mathbf{r_a}$ aller Mengen, die sich selbst enthalten

Tabelle 3.6: Verschiedene Mengen

ersten Blick vielleicht verwirrende Eigenschaft zu existieren, obwohl sie keine Elemente hat. Es gibt die Auffassung, daß gerade das *Mengen* von *Eigenschaften* unterscheidet: Die Menge der runden Quadrate gibt es, aber die Eigenschaft „rund und quadratisch sein“ genauso wenig, wie es runde Quadrate (Instanzen oder Realisierungen der Eigenschaft) gibt. Die in der Tabelle mit $\mathbf{r_a}$ bezeichnete Menge aller Mengen, die sich selbst enthalten, ist ungewöhnlich und wird im nächsten Abschnitt (3.3.1) eine prominente Rolle spielen. Die Menge aller unendlich großen Mengen ist eine solche Menge, denn sie ist selbst unendlich groß. Die Menge aller Zweiermengen (aller Paare) ist keine solche Menge, denn sie ist selbst keine Zweiermenge.

Für die Komplementär-, Schnitt-, Vereinigungsmenge und die leere Menge sowie auch für die Menge $\mathbf{r_a}$ läßt sich die Einzigkeit beweisen: Über das Postulat **KP** wird die Existenz einer entsprechenden Menge garantiert, **EP** garantiert, daß nur eine entsprechende Menge für die k existiert.

Beispiel 35

Solche Einzigkeitsbeweise lassen sich im Grunde immer auf die selbe Weise führen: Man nimmt an, es gebe mehr als eine geforderte Menge für eine Belegung der freien Variablen und führt die Annahme zum Widerspruch. Der Beweis kann *mit den Mitteln geführt werden, die die Prädikatenlogik zur Verfügung stellt:*

Seien a_1 und a_2 Mengen und es gelte $b_1 = a_1 \cap a_2$ und $b_2 = a_1 \cap a_2$ und, als zu widerlegende Annahme, $\sim b_1 = b_2$.

1.	$\{1\}$	$\sim b_1 = b_2$	*Annahme*
2.	$\{1\}$	$\exists x((x \varepsilon b_1 \wedge \sim x \varepsilon b_2) \vee (\sim x \varepsilon b_1 \wedge x \varepsilon b_2))$	***EP***
3.	$\{1,3\}$	$(c \varepsilon b_1 \wedge \sim c \varepsilon b_2) \vee (\sim c \varepsilon b_1 \wedge c \varepsilon b_2)$	*Hypothese*
4.	$\{4\}$	$c \varepsilon b_1 \wedge \sim c \varepsilon b_2$	*Hypothese*
5.	$\{4\}$	$c \varepsilon b_1$	***B*** $\wedge 4$
6.	$\{4\}$	$\sim c \varepsilon b_2$	***B*** $\wedge 4$
7.	$\{4\}$	$c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2$	***KP**,* 5
8.	$\{4\}$	$\sim c \varepsilon a_1 \vee \sim c \varepsilon a_2$	***KP***5
9.	$\{4\}$	$\sim(c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2)$	*Theorem, 7*
10.	$\{10\}$	$\sim c \varepsilon b_1 \wedge c \varepsilon b_2$	*Hypothese*
11.	$\{10\}$	$\sim c \varepsilon b_1$	***B*** $\wedge 10$
12.	$\{10\}$	$c \varepsilon b_2$	***B*** $\wedge 10$
13.	$\{10\}$	$\sim c \varepsilon a_1 \vee \sim c \varepsilon a_2$	***KP*** 11
14.	$\{10\}$	$c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2$	***KP*** 12
15.	$\{10\}$	$\sim(c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2)$	*Theorem, 13*
16.	$\{1,3\}$	$c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2$	***B*** $\vee 3, 7, 14$
17.	$\{1,3\}$	$\sim(c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2)$	***B*** $\vee 3, 9, 15$
18.	$\{1\}$	$c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2$	***B*** $\exists 3, 16$
19.	$\{1\}$	$\sim(c \varepsilon a_1 \wedge c \varepsilon a_2)$	***B*** $\exists 3, 17$
20.	$\{\}$	$b_1 = b_2$	***B*** $\sim 1, 18, 19$

*Es wurde angenommen, daß es zwei Schnittmengen gibt. Dann unterscheiden sie sich in wenigstens einem Element und dieses wurde vorläufig mit „c“ bezeichnet. Wenn sich die Schnittmengen durch dieses Element unterscheiden, ist es in einer der Mengen, die sich schneiden, enthalten und in der anderen nicht. Die sich ergebenden beiden Möglichkeiten sind völlig symmetrisch und beide können, wie gezeigt, zum Widerspruch geführt werden. Also gibt es kein solches Element, dann unterscheiden sich die Schnittmengen in keinem Element und sind nach **EP** identisch.*

Die Mittel, die uns die naive Mengentheorie in der beschriebenen Form in die Hand gibt, erlauben es, eine Reihe wichtiger Begriffe zu formulieren, die ihren Weg aus der Mathematik in die Philosophie gefunden[10] haben. Hilbert sprach

[10] Manche auch: *zurückgefunden*.

von einem Paradies für Mathematiker, welches Cantor mit der Mengentheorie geschaffen habe. Sie hat nur einen Haken: Naive Mengentheorie ist ist einfach zu formulieren, elegant, für den Anfang ziemlich vertrauenswürdig und auch natürlich in dem Sinne, daß sie ein Verständnis von „Menge“ beschreibt, daß recht natürlich erscheint. Aber ach: Sie ist widersprüchlich.[11]

Russells Menge

Die folgende Ableitung eines Widerspruches – sie ist auch mit den Mitteln der Prädikatenlogik Schritt für Schritt zu führen – beginnt mit einer Einsetzung in **KP**. Dabei wird eine Menge benutzt, die der oben besprochenen Menge $\mathbf{r_a}$ verwandt ist:

(1) $\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \in i \equiv (M(j) \wedge \sim j \in j)))$

ist ein Axiom und behauptet die Existenz einer Menge von Mengen, die nur die Mengen enthält, die sich nicht selbst als Menge enthalten. Sei diese Menge $\mathbf{r}$ genannt. Es gilt:

(2) $\forall j(j \in \mathbf{r} \equiv (M(j) \wedge \sim j \in j))$.

Da der Quantor in der Formel (2) sich auf den gesamten Individuenbereich bezieht, kann auch $\mathbf{r}$ eingesetzt werden, und da $\mathbf{r}$ nach Voraussetzung eine Menge sein soll, kann die erste Bedingung der rechten Seite der Bisubjunktion als erfüllt vorausgesetzt werden. Also ergibt sich nach entsprechender Einsetzung:

RP $\mathbf{r} \in \mathbf{r} \equiv \sim \mathbf{r} \in \mathbf{r}$.

Da **r** Element von sich ist oder kein Element von sich ist (dies ist eine Tautologie), und da aus jeder der Alternativen sowohl die Formel $\mathbf{r} \in \mathbf{r}$ als auch deren Negation ableitbar ist, ist die Negation von (1) beweisbar.[12] Die naive Mengentheorie ist

[11] Die Klage stammt aus [6, S. 488]

[12] Am Russell-Paradox ist nichts geheimnisvolles, es ist ein Widerspruch, der im Rahmen einer Theorie beweisbar ist. Das Auftreten eines Widerspruchs führt dazu, daß man die Schlüssigkeit der Argumentation, den Beweisgang eben, überprüft. Im gegebenen Fall werden nur ganz wenige und recht elementare Mittel verwendet, die kaum bezweifelt werden können. Da korrekte Schlüsse von wahren Prämissen auf wahre Konklusionen führen und hier eine falsche Konklusion vorliegt, muß unter den Voraussetzungen (mindestens) eine falsche sein. Also ist die Theorie nicht in Ordnung, die skizzierten Vorstellungen über Mengenbildung und Mengenidentität sind trotz aller scheinbarer Plausibilität nicht zu halten. Paradoxe sind immer Defekte. Daß das Russell-Paradox und seine Verwandten „Paradoxie“ oder „Antinomie“ und nicht einfach „Widerspruch“ genannt werden, drückt den Wunsch der Mathematiker aus, nicht aus Cantors Paradies vertrieben zu werden, steht in einem Klassiker zur Mengentheorie [7, S. 4].

ohne weitere Einschränkungen nicht widerspruchsfrei.

Um das von Bertrand Russell etwa 1901 entdeckte Paradox[13] herum gibt es eine ausführliche Diskussion und eine umfangreiche Literatur. Mittlerweile scheint es Konsens zu sein, die Ursache für das zustandekommen des Paradoxes darin zu sehen, daß bei der „Mengenbildung“ *die Menge aller Mengen derart, daß* die Menge selbst ja schon vorausgesetzt ist, bei ihrer eigenen Bildung als Element eine Rolle spielt. Ein solcher Selbstbezug ist in der natürlichen Sprache nicht unbekannt und führt bei weitem nicht immer zu Problemen. BITTE DEN EINZIGEN IN KAPITÄLCHEN GESCHRIEBENEN SATZ AUF DIESER SEITE NOCHEINMAL DURCHLESEN bezieht sich auf den einzigen in Kapitälchen geschriebenen Satz auf der Seite – auf sich selbst. Descartes nutzt eine versteckte Selbstbezüglichkeit aus, wenn er argumentiert „Ich denke, also bin ich“. Wer klar erkennt, daß er denkt, und dies Erkennen ist eine Form von denken, der ist beteiligt, seine Existenz wird präsupponiert. Im Falle von Russells und anderen Paradoxen gibt es aber Schwierigkeiten, wie oben gezeigt wurde. Vielleicht ist die Menge aller Mengen, die bei der Konstruktion eine Rolle spielt, aber auch einfach zu groß? Der im folgenden skizzierte immer noch naive Ansatz kombiniert beide Gedanken.[14]

Eine naheliegende Möglichkeit die naive Mengentheorie zu retten besteht entsprechend darin, nur bereits gebildete Entitäten zum Aussondern von Mengen zuzulassen. Anstelle von **KP** – zu jeder Bedingung gibt es eine Menge von Gegenständen, die der Bedingung genügen – wird ein anderes Prinzip verwendet: Zu jeder Menge und jeder Bedingung gibt es eine Menge von Gegenständen, die der Bedingung genügen und aus der Menge ausgesondert werden. Das sieht dann so aus:

AP Für alle Formeln A ein Schema
$\forall j \exists i (M(j) \supset (M(i) \wedge \forall k (k \mathrel{\textsf{E}} i \equiv (k \mathrel{\textsf{E}} j \wedge A))))$

Der Versuch, ein Äquivalent zum Russell-Paradox herzuleiten, endet mit der Formel

RP′ $a \mathrel{\textsf{E}} a \equiv (a \mathrel{\textsf{E}} b \wedge {\sim} a \mathrel{\textsf{E}} a)$

[13] Unabhängig von Russell und möglicherweise früher ist es Ernst Zermelo bekannt gewesen. Er hat dies jedoch nie publiziert.

[14] Man kann selbstverständlich auch beispielsweise ganz banal alle Konstruktionen *ad hoc* verbieten, die zu Widersprüchen führen. Die Begründung für ein solches Vorgehen ist nicht schwierig zu finden: Gerade das Auftreten eines Widerspruches zeigt, daß der angenommene Mengenbildungsprozeß gar nicht zu einer Menge führt. Nicht jede verbal festgehaltene Eigenschaft konstituiert schon eine Menge.

wobei b die Menge ist, aus der ausgesondert werden soll. Würde $a \in b$ gelten, wäre das Russell-Paradox manifest. Gerade das zeigt aber, daß eben $a \in b$ nicht gelten kann, und insbesondere kann b keinesfalls die Menge aller Mengen sein. Kurz gesagt, es gibt keine Menge, die einfach *alles* enthält.

Das Prinzip **AP** verhindert das Russell-Paradox und läßt genügend Freiheit, um die üblichen mengentheoretischen Begriffsbildungen durchzuführen. Termini wie „geordnetes Paar“, „Relation“, „natürliche Zahl“ und viele andere können in diesem Rahmen expliziert und betrachtet werden (vergleiche dazu Abschnitt 3.3.2). Kritisch ist zu bemerken, daß **AP** im Gegensatz zu **KP** Mengen voraussetzt, also Mengen *aus vorhandenen* Mengen aussondert. **KP** dagegen versucht zu fassen, wie Mengen überhaupt gebildet werden. Die in einem folgenden Abschnitt beschriebene iterative Auffassung von Mengenbildung geht von einem stufenweisen Prozess der Bildung von Mengen aus, bei denen auf jeder Stufe alle bereits vorhandenen Elemente und Mengen zu Mengen zusammengefaßt werden können. Im Ergebnis erhält man eine Rechtfertigung für die moderne axiomatische Mengentheorie. Im nun folgenden Abschnitt werden einige Grundbegriffe im Rahmen der naiven Mengentheorie vorgestellt, die teilweise bereits bei der Formulierung der Semantik der Prädikatenlogik verwendet worden sind. Es ist durchaus ein Problem für die Begründung der Logik, ob die Mengentheorie ein Teil, eine Voraussetzung oder ein Aufbau auf der Prädikatenlogik ist. Es wird vorausgesetzt, daß das Russell-Paradox und seine Verwandten auf irgendeine Weise blockiert worden sind.

3.3.2 Tupel, Relationen, Funktionen

Der Bequemlichkeit halber und zur zukünftigen Verwendung wird ein neues Prädikat neben dem des Enthaltenseins in einer Menge $\in$ definiert – das Prädikat, *Untermenge* zu sein.

Definition 31
Seien i_1 und i_2 Mengen. Dann ist i_1 genau dann Untermenge von i_2, wenn für alle Gegenstände gilt: Wenn sie Element der ersten Menge sind, sind sie auch Element der zweiten.

$$i_1 \subseteq i_2 \quad =_{\texttt{dfn}} \quad \forall j (j \in i_1 \supset j \in i_2)$$

Die Menge i_1 ist eine echte Untermenge von i_2, wenn sie Untermenge von i_2 ist, aber nicht identisch mit ihr.

$$i_1 \subset i_2 \quad =_{\texttt{dfn}} \quad i_1 \subseteq i_2 \wedge {\sim} i_1 = i_2$$

Man kann eine ganze Reihe von Aussagen mit der Untermenge-Relation beweisen, so beispielsweise daß jede Schnittmenge Untermenge der schneidenden Mengen ist, jede der sich vereinigenden Mengen Untermenge der Vereinigungsmenge. Ein interessanter Satz behauptet, daß die leere Menge Untermenge jeder Menge ist:

Lemma 27
$\forall i \quad \emptyset \subseteq i$

Beweis Aufgrund der Definition der leeren Menge gilt:

$$\forall j \quad \sim j \in \emptyset$$

Mit Hilfe der Regeln **B** $\forall$, **E** $\forall$ und **E** $\supset$ läßt sich zeigen:

$$\forall i \forall j \quad (\sim j \in \emptyset \supset (j \in \emptyset \supset j \in i))$$

Damit gilt auch

$$\forall i \forall j \quad (j \in \emptyset \supset j \in i)$$

und der Beweis ist beendet, denn diese Zeile bezeichnet nichts anderes als die Behauptung, daß die leere Menge Untermenge beliebiger Mengen ist. Kurz zusammengefaßt nutzt er, daß wenn etwas Element der leeren Menge ist (aber da ist nichts drin), es in jeder Menge ist.[15]

Bestimmte Mengen kommen in den Diskussionen und Beispielen um philosophisch relevante Themen immer wieder vor. Im Abschnitt 3.3.2 werden einige dieser Mengen vorgestellt.

Mengen von besonderem Interesse

Es ist nicht weiter schwierig, Mengen mit mindestens ein, zwei, drei, ... Elementen, höchstens ein, zwei, drei, ... Elementen und genau ein, zwei, drei, ... Elementen wie in Tabelle 3.7 zu charakterisieren.

Die dritte Formel in Tabelle 3.7 und entsprechende weitere erlauben es, die Men-

[15] Der Satz ist eine Folge der sogenannten *Paradoxien der materialen Implikation*. Das sogenannte negative Paradox der materialen Implikation besagt etwa, daß aus einer falschen Aussage eine beliebige Aussage folgt: $\sim A \supset (A \supset B)$. Hier ist der Terminus „Paradox" besonders irreführend, da die Formel leicht erkennbar eine Tautologie ist und lediglich bestimmte Einsetzungen unter bestimmten Interpretationen der Subjunktion zu seltsamen Sätzen führen: „Wenn Wittgenstein das 'Kapital' nicht geschrieben hat, dann suchen Philosophen Freude im Leben, wenn Wittgenstein das 'Kapital' geschrieben hat".

i hat mindestens 3 Elemente	$\forall j_1 \forall j_2((j_1 \in i \wedge j_2 \in i \wedge \sim j_1 = j_2) \supset \exists j_3(\sim j_1 = j_3 \wedge \sim j_2 = j_3 \wedge j_3 \in i))$
i hat höchstens 2 Elemente	$\forall j_1 \forall j_2 \forall_3((j_1 \in j \wedge j_2 \in j \wedge j_3 \in j) \supset (j_1 = j_2 \vee j_1 = j_3 \vee j_2 = j_3))$
i hat genau 1 Element	$\exists j_1(j_1 \in i \wedge \forall j_2(j_2 \in i \supset j_1 = j_2))$

Tabelle 3.7: Beispiele für Mengen bestimmter Anzahl

ge aller Einermengen, die Menge aller Zweiermengen, die Menge aller Dreiermengen, ... zu bilden. Seien $\mathbb{N}^m$ die jeweiligen Eigenschaften, genau m Elemente zu haben. Dann existieren die passenden Mengen nach **KP**[16]:

$$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \in i \equiv \mathbb{N}^1(j)))$$

$$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \in i \equiv \mathbb{N}^2(j)))$$

$$\exists i(M(i) \wedge \forall j(j \in i \equiv \mathbb{N}^3(j)))$$

Eine wichtige Mengenbildungsoperation ist die Potenzmengenbildung. Mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(k)$ einer Menge k wird die Menge ihrer Untermengen bezeichnet:

$$\forall k \exists i(M(i) \wedge \forall j(j \in i \equiv j \subseteq k))$$

Auch für die Potenzmenge einer bestimmten Menge läßt sich die Einzigkeit zeigen: Gäbe es zwei unterschiedliche Potenzmengen zu einer Menge, müßten sie sich nach **EP** in einem Element unterscheiden. Das hieße, daß wenigstens eine Menge Untermenge und auch nicht Untermenge der Ausgangsmenge wäre.

Beispiel 36

1. *Sei die Ausgangsmenge die Menge der Finger an einer Hand* $k = \{$***D****aumen*, ***Z****eigefinger*, ***M****ittelfinger*, ***R****ingfinger*, *kleiner* ***F****inger*$\}$. *Dann besteht* $\mathcal{P}(k)$ *aus der leeren Menge, allen Einermengen von Fingern, Paaren von Fingern, Tripeln und Quadrupeln von Fingern und der Menge*

[16] Ebenso können die Mengen auf der Basis von **AP** gebildet werden.

k selbst:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k) = \{ \quad & \emptyset, \\ & \{D\}, \{Z\}, \{M\}, \{R\}, \{F\}, \\ & \{D, Z\}, \{D, M\}, \ldots, \{R, F\}, \\ & \{D, Z, M\}, \{D, Z, R\}, \{D, Z, F\}, \ldots, \{M, R, F\}, \\ & \{D, Z, M, R\}, \{D, Z, M, F\}, \ldots, \{Z, M, R, F\}, \\ & \{D, Z, M, R, F\} \qquad \}\end{aligned}$$

Auffallend ist, daß die Potenzmenge sehr viel größer ist, als die Ausgangsmenge – während k im Beispielsfall eine „Fünfermenge“ ist, hat $\mathcal{P}(k)$ 32 Elemente.

2. *Man kann eine große Anzahl von Mengen geradezu aus dem „Nichts“ heraus erschaffen, indem immer wieder Potenzmengen gebildet werden: Ausgangspunkt ist die leere Menge, es gibt keine Elemente. Der nächste Schritt ist die Menge, die die leere Menge enthält, und der übernächste ist die Menge, die diese und die leere Menge enthält …*

$$\begin{array}{lcl} k & = & \emptyset \\ \mathcal{P}(k) & = & \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(k)) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(k))) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Paare, geordnete Tupel und Cartesische Produkte

Mengen sind nützliche mathematische Entitäten, für viele Zwecke werden aber eher geordnete Anzahlen von Objekten gebraucht. Mengen sind ungeordnet, weder die Reihenfolge noch die Häufigkeit des Vorkommens eines Elementes in einer Menge spielt eine Rolle, allein *daß* es vorkommt, zählt. Genau das ist ja auch der Sinn des Prinzips **EP** – Mengen sind genau dann identisch, wenn die gleichen Elemente vorkommen, ganz egal wie oft und an welcher Stelle. Die grundlegende Idee für ein Prinzip, nach dem geordnete Mengen identifiziert werden, müßte die Reihenfolge des Vorkommens mit einbeziehen. Wenn das aber so ist, so können Elemente auch mehrfach vorkommen, denn ein Vorkommen an der einen und an der anderen Stelle unterscheiden sich dann. Der einfachste zu betrachtende Fall ist offenbar ein geordnetes Paar.

Beispiel 37
Die Mengen $\{$Paul, Paula$\}$ und $\{$Paula, Paul, Paul$\}$ unterscheiden sich nicht, da

Paul und Paula beide in beiden Mengen vorkommen und sonst nichts in einer der Mengen vorkommt. Als geordnete Anhäufungen, als Tupel unterscheiden sie sich ganz offensichtlich, denn in der ersten ist Paula nach Paul und in der zweiten kommt Paul zweimal vor.

Das erstrebenswerte Identitätskriterium für geordnete Paare sollte also darauf hinauslaufen, daß geordnete Paare identisch sind, wenn sie an jeder Stelle in ihren Elementen übereinstimmen:

IKP $\langle i_1, i_2\rangle = \langle j_1, j_2\rangle \;\; =_{\mathit{dfn}} \;\; i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2.$

Allerdings sind die so in die Sprache eingeführten Objekte, die geordneten Paare, keine Mengen. Gerade das sie anders individuiert werden, zeigt das ja. Wenn **IKP** jedoch die einzige Bedingung ist, die an geordnete Paare gestellt wird, dann kann man sie als mengentheoretische Objekte benutzen falls es gelingt, „Stellvertreter" zu finden. Damit sind Mengen gemeint, die oberflächlich vielleicht nicht so aussehen wie geordnete Paare, aber ebenfalls Reihenfolge und Häufigkeit berücksichtigen. Eine solche mengentheoretische Repräsentation geordneter Paare gibt es:

Definition 32
$\langle i, j\rangle \;\; =_{\mathtt{dfn}} \;\; \{\{i\}, \{i, j\}\}.$

Um zu zeigen, daß die Definition dem Prinzip **IKP** genügt, ist zu zeigen:

Lemma 28
Wenn $\langle i_1, i_2\rangle = \langle j_1, j_2\rangle$, so $i_1 = j_1$ und $i_2 = j_2$.

An diesem Lemma liegt es, daß die Mengen für die geordneten Paare stehen können, denn die Mengen lassen eindeutige Rückschlüsse auf die Elemente und deren Position im geordneten Paar zu.

Beweis Wenn $i_1 = i_2$ ist, dann sind offenbar $\{i_1\}$ und $\{i_1, i_2\}$ die gleiche Menge und $\langle i_1, i_2\rangle$ ist $\{\{i_1\}\}$. Wegen der Identität der beiden geordneten Paare ist $\langle j_1, j_2\rangle$ ebenfalls $\{\{i_1\}\}$ und damit gilt: $i_1 = i_2 = j_1 = j_2$.

Wenn nicht $i_1 = i_2$ ist, dann sind die Mengen wie in Definition 32 beschrieben und es gilt also nach Voraussetzung: $\{\{i_1\}, \{i_1, i_2\}\} = \{\{j_1\}, \{j_1, j_2\}\}$. Die beiden Mengen bestehen je aus zwei Mengen, einer Einer- und einer Zweiermenge. Da die Mengen identisch sind, müssen die beiden Einermengen und die beiden

Zweiermengen identisch sein. Da die beiden Einermengen identisch sind, enthalten sie das selbe Element und es gilt $i_1 = j_1$, analoges gilt für die Zweiermengen. Die Paare stimmen also im ersten Element überein und haben die gleichen Elemente, stimmen also auch im zweiten Element überein – dies war zu zeigen.

Die gefundene Definition unterscheidet zwischen $\langle i_1, i_2\rangle$ und $\langle i_2, i_1\rangle$: Ersteres ist die Menge $\{\{i_1\}, \{i_1, i_2\}\}$, letzteres $\{\{i_2\}, \{i_1, i_2\}\}$. Für den Fall, daß i_1 und i_2 nicht identisch sind, unterscheiden sich die beiden Mengen – genau das, was gefordert ist.

Die Explikation von geordneten Paaren kann leicht auf geordnete Tripel, Quadrupel, ... allgemein: geordnete Tupel verallgemeinert werden. Auch solche geordneten Tupel, endliche Vielheiten von Elementen, bei denen es auf die Position ankommt, können als Mengen repräsentiert werden. Anstelle eines geordneten n-Tupels betrachtet man die Menge, die aus der Einermenge des ersten Tupel-Gliedes, aus der Zweiermenge der ersten beiden Tupel-Glieder, ... und aus der Menge aller Tupel-Glieder besteht:

Beispiel 38
Anstelle des geordneten 5-Tupels

$$\langle \textbf{\textit{D}}\textit{aumen}, \textbf{\textit{Z}}\textit{eigefinger}, \textbf{\textit{M}}\textit{ittelfinger}, \textbf{\textit{R}}\textit{ingfinger}, \textit{kleiner}\ \textbf{\textit{F}}\textit{inger}\rangle$$

wird die Menge

{{D},{D,Z},{D,Z,M}, {D,Z,M,R}, {D,Z,M,R,F} }

betrachtet.

Eine kurze Durchsicht des Beweises von Lemma 28 zeigt, daß auch der Satz und sein Beweis verallgemeinerbar sind und so das allgemeine Individuationsprinzip gilt:

IKT Zwei n-Tupel sind genau dann identisch, wenn sie in jeder Position übereinstimmen.

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle = \langle j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle \quad \text{dann und nur dann, wenn} \quad i_1 = j_1 \wedge i_2 = j_2 \wedge \ldots \wedge i_n = j_n$$

Es ist eine natürliche Verallgemeinerung nun danach zu fragen, ob man zu jedem Paar von Mengen die Menge aller (geordneten) Paare von Elementen so bilden kann, daß die erste Position jeweils mit einem Element der ersten Menge und die zweite Position mit einem Element der zweiten Menge besetzt ist.

Beispiel 39
Man stelle sich zwei schachbegeisterte Familien mit drei (I) bzw. vier (J) Mitgliedern vor, die einen „jeder gegen jeden"-Familienwettkampf austragen möchten. i_1 soll also gegen jeden der j mit Weiß spielen, genau wie i_2 und i_3. Da dann natürlich auch jeder der j gegen jeden i mit Weiß spielen wird, gibt es zwei Listen von Paarungen (mit Weiß als erstgenanntem Spieler):

I gegen J

$$\begin{array}{llll} \{\langle i_1, j_1\rangle & \langle i_1, j_2\rangle & \langle i_1, j_3\rangle & \langle i_1, j_4\rangle \\ \ \langle i_2, j_1\rangle & \langle i_2, j_2\rangle & \langle i_2, j_3\rangle & \langle i_2, j_4\rangle \\ \ \langle i_3, j_1\rangle & \langle i_3, j_2\rangle & \langle i_3, j_3\rangle & \langle i_3, j_4\rangle\} \end{array}$$

J gegen I

$$\begin{array}{lll} \{\langle j_1, i_1\rangle & \langle j_1, i_2\rangle & \langle j_1, i_3\rangle \\ \ \langle j_2, i_1\rangle & \langle j_2, i_2\rangle & \langle j_2, i_3\rangle \\ \ \langle j_3, i_1\rangle & \langle j_3, i_2\rangle & \langle j_3, i_3\rangle \\ \ \langle j_4, i_1\rangle & \langle j_4, i_2\rangle & \langle j_4, i_3\rangle\} \end{array}$$

Die erste Liste wird mit $I \times J$ und die zweite mit $J \times I$ bezeichnet – die entsprechenden cartesischen Produkte der beiden Mengen.

Aufgrund der Tatsache, daß es sich bei geordneten Paaren $\langle i, j\rangle$ um Mengen (von Mengen) handelt, kann die Tupel-Notation künftig verwendet werden. Sie läßt sich schließlich immer auf der Grundlage der Definition 32 wieder ausschließen. So läßt sich nach **KP** (oder **AP** oder nach einem anderen passenden Prinzip) behaupten und dann festlegen:

Definition 33

- $\forall i_1 \forall i_2 \exists j(k \mathrel{\mathsf{E}} j \equiv k = \langle k_1, k_2\rangle \wedge k_1 \mathrel{\mathsf{E}} i_1 \wedge k_2 \mathrel{\mathsf{E}} i_2)$
- $\forall i_1 \ldots \forall i_n \exists j(k \mathrel{\mathsf{E}} j \equiv k = \langle k_1, \ldots, k_n\rangle \wedge k_1 \mathrel{\mathsf{E}} i_1 \wedge \ldots \wedge k_n \mathrel{\mathsf{E}} i_n)$

Für je n Mengen gibt es ein Menge von n-Tupeln, deren erstes Element aus der ersten Menge, das zweite aus der zweiten, …, und das n-te Element aus der n-ten Menge stammt.

- *Es gibt genau eine solche Menge von n-Tupeln.*

Der Nachweis für diese Eindeutigkeitsbehauptung wird genau so geführt, wie das weiter oben für andere Mengen vorgeführt wurde.

- *Diese Menge wird als cartesisches Produkt bezeichnet und folgendermaßen notiert:*
  $a_1 \times \ldots \times a_n = \{\langle a_i, \ldots, a_j\rangle : a_i \mathrel{\mathsf{E}} a_1 \wedge \ldots \wedge a_j \mathrel{\mathsf{E}} a_n\}$

- $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n-fach}$ *ist das n-fache cartesische Produkt von a mit sich selbst.*

Beispiel 40
Die Menge aller Belegungen mit Wahrheitswerten für einen zweistelligen satzbildenden Operator ist die Menge aller Paare aus $\{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$: Eine Aussage $A * B$ mit $*$ als zweistelligem aussagenlogischen Operator (wie beispielsweise die Konjunktion oder die Subjunktion) kann folgendermaßen belegt sein:
$\{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle, \langle \mathbf{w}, \mathbf{f}\rangle, \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle, \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle\}$*, dies ist* $\{\mathbf{w}, \mathbf{f}\} \times \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$ *oder auch* $\{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^2$.

Es ist leicht zu sehen, daß $\{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^2 \times \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\} \neq \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^3$*, denn:*
$\langle\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle, \mathbf{w}\rangle \in \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^2 \times \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$ *aber nicht*
$\langle\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle, \mathbf{w}\rangle \in \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^3$*;* *und*
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \in \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^3$ *aber nicht*
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \in \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}^2 \times \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$.

Relationen und Funktionen

In diesem Abschnitt wird ein Verständnis von „Relation“ und „Funktion“ vorgestellt, das in der Mathematik (und Logik) ganz üblich ist und welches – implizit – auch die Grundlage der Begriffe ist, die durchweg in diesem Text verwendet worden sind.

Paradigmatische Beispiele für Relationen sind „größer als“, „liegt zwischen“ oder „schenkt“: Berlin ist größer als München, Magdeburg liegt zwischen Berlin und Hannover und Adam schenkt Bea das „Kapital“ zu Ostern. Der erste Ausdruck ergibt mit zwei weiteren einen vollständigen Satz, der zweite mit drei und der dritte benötigt – in der hier intendierten Lesart – vier Ausdrücke: zwei Personennamen, einen Namen eines Gegenstandes (oder vielleicht einer Handlung) und den eines Anlasses. Einstellige offene Ausdrücke wie „rot“ oder „groß“ werden in der natürlichen Sprache nicht als Relationen, sondern als Eigenschaften bezeichnet. Man kann sie mit gutem Grund als einstellige Relationen (neben den erwähnten zweistelligen, dreistelligen, vierstelligen und so fort) bezeichnen, denn zum einen liegen sie in der Reihe „benötigt ein, zwei, drei ... Ausdrücke, um ein vollständiger Satz zu werden“, zum anderen kann man die zweistelligen, dreistelligen usw. Relationen, wie noch gezeigt wird, als Eigenschaften von Paaren, Tripeln usw. auffassen. Aus diesem Grunde werden die Eigenschaften im folgenden nicht weiter gesondert behandelt und „Relation“ heißt immer: Relation beliebiger fixierter Stellenzahl (einschließlich Eins). Es lassen sich nur schwer umgangssprachliche Beispiele für fünf- oder höherstellige Relationen finden. Hier ist es gleichgültig, wieviel-stellig eine Relation ist, es kommt allein darauf an, daß die Stellenzahl endlich ist.

Mengentheoretisch werden die Relationen als Mengen von Tupeln aufgefaßt, die durch die offenen Ausdrücke ausgesondert werden: „rot“ wird durch die Menge der roten Gegenstände, „größer als“ als Menge der geordneten Paare, bei denen das erste Glied größer als das zweite ist, und „liegt zwischen“ als Menge aller Tripel, bei denen das erste Glied zwischen dem zweiten und dem dritten liegt, repräsentiert. Kurz gesagt: Eine n-stellige Relation ist eine Menge von n-Tupeln (nämlich der, auf die die Relation zutrifft).[17]

Definition 34
Jede Untermenge des n-fachen cartesischen Produkts a^n mit sich selbst eine n-stellige Relation R^n in a.

Beispiel 41

- *In der Menge der natürlichen Zahlen ist „größer als“ eine Relation, zu der $\langle 3, 2\rangle$ und $\langle 17, 4\rangle$ gehören, aber nicht $\langle 5, 12\rangle$.*
- *In der Menge der Länder ist „größer als“ eine Relation, zu der ⟨China, Deutschland⟩ und ⟨Ukraine, Liechtenstein⟩ gehören, aber nicht ⟨Deutschland, Rußland⟩.*
- *In der Menge der physischen Gegenstände ist „größer als“ eine Relation, zu der ⟨Eifelturm, Herrn Ns Personalausweis⟩ gehört, aber keines der anderen eben gerade erwähnten Paare, da diese nicht aus physischen Gegenständen bestehen.*

Eine besondere Rolle spielen zweistellige Relationen. in der folgenden Definition werden Eigenschaften von zweistelligen Relationen vorgestellt, die sowohl in den Arbeiten von Logikern als auch von Philosophen immer wieder verwendet werden:

Definition 35
Die Relation R^2 in a ist reflexiv, wenn $\langle i, i\rangle \in R^2$ für alle $i \in a$.
Die Relation R^2 in a ist irreflexiv, wenn $\sim\langle i, i\rangle \in R^2$ für alle $i \in a$.

[17] An dieser Stelle wird klar, warum man Relationen als Eigenschaften von Tupeln auffassen kann: „größer als“ ist die Eigenschaft von Paaren, die jene aussondert, bei denen das erste Glied größer als das zweite ist.

Die Relation R^2 in a ist symmetrisch, wenn mit $\langle i, j\rangle \in R^2$ auch immer $\langle j, i\rangle \in R^2$.

Die Relation R^2 in a ist asymmetrisch, wenn mit $\langle i, j\rangle \in R^2$ niemals $\langle j, i\rangle \in R^2$.

Die Relation R^2 in a ist antisymmetrisch, wenn mit $\langle i, j\rangle \in R^2$ und $\langle j, i\rangle \in R^2$ immer auch $i = j$ gilt.

Die Relation R^2 in a ist transitiv, wenn mit $\langle i, j\rangle \in R^2$ und $\langle j, k\rangle \in R^2$ auch immer $\langle i, k\rangle \in R^2$.

Die Relation R^2 in a ist linear, wenn für alle i, j $\langle i, j\rangle \in R^2$ oder $\langle j, i\rangle \in R^2$.

Die Relation R^2 in a ist konnex, wenn für alle i, j $\langle i, j\rangle \in R^2$ oder $\langle j, i\rangle \in R^2$ oder $i = j$.

Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, heißen Äquivalenzrelationen. „gleichgroß“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Menschen, genauso wie die berüchtigte „Selbstidentität“. Eine Äquivalenzrelation „zerschlägt“ eine Menge so in Untermengen, daß alle Elemente einer Untermenge in dieser Relation zu allen anderen Elementen dieser Untermenge sind und zu keinem anderen Element der Menge. Diese Untermengen werden auch Äquivalenzklassen genannt:

Satz 29
Es sei R eine Äquivalenzrelation in einer Menge a und für jedes $i \in a$ sei $i|R$ die Menge der Elemente von a, die in Relation R zu i stehen: $\quad i|R = \{j : R(i, j)\}$.

1. *Die Äquivalenzklassen identischer Elemente sind identisch:*
   $\forall i \forall j\ (i = j \quad \supset \quad i|R = j|R)$

2. *Keine Äquivalenzklasse ist leer:*
   $\forall i \sim i|R = \emptyset$

3. *Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist a:*
   $\bigcup_{i \in a} i|R \quad = \quad a$

4. *Äquivalenzklassen sind disjunkt, das heißt, die Schnittmengen beliebiger nichtidentischer Äquivalenzklassen sind leer (kein Element ist Element zweier verschiedener Äquivalenzklassen):*
   $\forall i \forall j\ ({\sim} i = j \quad \supset \quad i|R \cap j|R = \emptyset)$

Beweis Die erste Behauptung gilt, weil wegen der Ersetzbarkeit Identischer und der Reflexivität der Äquivalenzrelation auch gilt: $i \in j|R$ und $j \in i|R$. Wegen der Transitivität gilt dann auch $\forall k(k \in j|R \supset R(i,k))$ und für j entsprechend.

Die zweite und dritte Behauptung gelten wegen der Reflexivität von R.

Für den Beweis der vierten Behauptung sei angenommen, daß ein b in zwei verschiedenen Äquivalenzklassen sei. Dann steht es mit jedem $i' \in i|R$ wegen der Symmetrie in Relation R: $R(i', b$; und jedes $j' \in j|R$ steht zu ihm in Relation R: $R(b, j')$. Nach der Transitivität stehen dann alle Elemente der beiden Äquivalenzklassen in Relation R zueinander und gehören damit zur selben Äquivalenzklasse – die beiden angenommenen Mengen sind nicht verschieden, sondern identisch. Also kann b nicht zu unterschiedlichen Äquivalenzklassen gehören.

Der folgende Satz ist eine Umkehrung zu Satz 29, er behauptet, daß man zu einer Zerlegung einer Menge in Untermengen, die die Eigenschaften von Äquivalenzklassen haben, die entsprechende Äquivalenzrelation finden kann:

Satz 30
Sei b ein System von Untermengen von a, für das gilt:
$\bigcup_{i \in b} b \;=\; a$ *und für alle $i \in b$, $j \in b$:* $i \cap j \;=\; \emptyset$.
Es läßt sich eine Äquivalenzrelation R genau so finden, daß b die Menge der Äquivalenzklassen zu R ist.

Beweis Eine solche Äquivalenzrelation ist folgendermaßen definiert:
$R(k, k') \;=_{dfn}\; \exists i(i \in b \wedge k \in i \wedge k' \in i)$

Eine kurze Betrachtung von R zeigt, daß R tatsächlich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist (das wird hier nicht vorgeführt). Die gesuchte Menge, die den Gebrauch des Existenzquantors auf der rechten Seite der Definition rechtfertigt, ist $k|R$.

Beispiel 42
Karl Marx hat bei der Analyse des Wertbegriffs eine Äquivalenzrelation genutzt und zur Definition des Wertes verwendet [19, Seiten 50–53]:

> *Der Tauschwert erscheint zunächst als das quantitative Verhältnis, die Proportion, worin sich Gebrauchswerte einer Art gegen Gebrauchswerte anderer Art austauschen, …*
>
> *Eine gewisse Ware, ein Quarter Weizen z.B. tausch sich mit x Stiefelwichse oder mit y Seide oder mit z Gold usw., kurz mit andern Waren in den verschiedensten Proportionen. …Aber da x Stiefelwichse,*

> *ebenso y Seide, ebenso z Gold usw. der Tauschwert von einem Quarter Weizen ist, müssen x Stiefelwichse, y Seide, z Gold usw. durch einander ersetzbare oder einander gleich große Tauschwerte sein. . . . Die gültigen Tauschwerte derselben Ware drücken ein Gleiches aus. . . .*
>
> *Das Gemeinsame, was sich im Austauschverhältnis oder Tauschwert der Ware darstellt, ist also ihr Wert.*

Marx hat beobachtet, daß man Quantitäten von Waren unabhängig von ihrem Gebrauchswert in Äquivalenzklassen einteilen kann, wenn man die Relation „tauscht sich gegen“ betrachtet. Er betont explizit, daß es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt („durch einander ersetzbar“, „ein Gleiches“), selbstverständlich ohne die moderne logische Terminologie zu benutzen, und führt dann den für seine Analyse zentrale Begriff des Wertes als Eigenschaft ein, in eine der Äquivalenzklassen zu fallen (ein wenig vergröbert: der Wert einer Ware ist ihre Eigenschaft, einen ganz bestimmten Tauschwert zu haben).

Eine Balkenwaage kann dazu benutzt werden, (wägbare) Gegenstände in Äquivalenzklassen von gleichgewichtigen aufzuteilen. Da jeder Gegenstand auf diese Weise in eine ganz bestimmte Untermenge von a fällt, ist damit auch eine Eigenschaft (eine einstellige Relation) auf a bestimmt. Hier ist dies, beispielsweise, „soviel wie diese Tüte Mehl zu wiegen“, oder – nach der Berücksichtigung des europäischen Systems der Maßeinheiten – „die Masse von einem Kilogramm zu haben“. Man kann sogar „Gewicht“ definieren, wie oben „Wert“ definiert wurde: Das ist die Eigenschaft, in eine bestimmte dieser Untermengen zu fallen.

Diese Technik, abstrakte Eigenschaften über Äquivalenzklassen zu definieren, wird häufig als „Definition durch Abstraktion“ bezeichnet. Bei der Diskussion des Cantorschen Paradoxes findet sie ein weiteres Beispiel (Seite). Referenz einsetzen

Neben den Äquivalenzrelationen sind es die Ordnungsrelationen, die die besondere Aufmerksamkeit von Mathematikern und Philosophen hervorgerufen haben.

Definition 36

1. *Eine zweistellige Relation R ist eine reflexive teilweise*[18] *Ordnung in a, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.*

[18] Anstelle von „teilweiser“ Ordnung findet man häufig auch: Halbordnung oder partielle Ordnung.

2. *Eine zweistellige Relation R ist eine irreflexive teilweise Ordnung in a, wenn R irreflexiv und transitiv ist.*

3. *Eine lineare reflexive teilweise Ordnung ist eine reflexive totale Ordnung.*

4. *Eine konnexe irreflexive teilweise Ordnung ist eine irreflexive totale Ordnung.*

3.3.3 Die iterative Mengenkonzeption

Kapitel 4

Wichtige Begriffe

bestimmte Kennzeichnung S. 74
: Eine bestimmte Kennzeichnung (definite Deskription) soll mit Hilfe einer Kombination von Eigenschaften genau einen Gegenstand aus dem Individuenbereich herausgreifen.

deduktiv äquivalent S. 43
: Logische Systeme sind äquivalent, wenn sie (unter Umständen nach Übersetzungsprozeduren) die gleichen Theoreme haben.

funktional vollständig S. 44
: Ein System von aussagenlogischen Operatoren heißt funktional vollständig, wenn in diesem alle satzverknüpfenden Verbindungen dargestellt werden können.

Sprache erster Stufe S. 7
: Die Quantoren der Sprache binden nur Individuenvariablen, die Argumentpositionen werden nur durch Individuenvariablen oder -konstanten besetzt.

Post-vollständig S. 42
: Ein deduktives System ist Post-vollständig, wenn für jede Formel gilt: Entweder ist sie Theorem im System, oder das Hinzufügen der Formel zu den Axiomen macht das System widersprüchlich.

Russell-Paradox S. 112
: In der Mengentheorie wird mit „Russell-Paradox“ die Aussage bezeichnet, daß die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, sowohl Element als auch nicht Element von sich selbst ist. Sie zeigt, daß der

Ausdruck „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“ keine Menge bezeichnet.

Literaturverzeichnis

[1] Aristoteles. *Topik*. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1992.

[2] Aurelius Augustinus. *Bekenntnisse*. Philipp Reclam Jun., Stuttgart, 1989.

[3] Paul Benacerraf and Hilary Putnam, editors. *Philosophy of Mathematics*, Cambridge, 1983. Cambridge University Press.

[4] Karel Berka and Lothar Kreiser. *Logik-Texte*. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[5] Otto Bird. *Syllogistic and its Extensions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[6] George Boolos. The iterative conception of set. *Journal of Philosophy*, 68:215–232, 1971. Wiederabdruck in [3, S. 486–502], zitiert wird nach dem Wiederabdruck.

[7] Abraham Fraenkel, Yeshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. *Foundations of Set Theory*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[8] Gottlob Frege. Function und begriff. Jena, 1891. Wiederabdruck in [4, S. 63-82], Zitiert wird nach dem Wiederabdruck.

[9] Gottlob Frege. Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF100:25–50, 1892. Wiederabdruck in [4, S. 423-441], Zitiert wird nach dem Wiederabdruck.

[10] Dov Gabbay and Franz Guenthner, editors. *Handbook of Philosophical Logic*, volume I: Elements of Classical Logic, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1983. D. Reidel Publishing Company.

[11] Paul Halmos. *Naive Mengenlehre*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976.

[12] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Wissenschaft der Logik*, volume 2. Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[13] Vincent Hendricks, Fabian Neuhaus, Stig Pedersen, Uwe Scheffler, and Heinrich Wansing, editors. *First-Order Logic Revisited*, Berlin, 2004. Logos Verlag.

[14] Immanuel Kant. *Kritik der reinen Vernunft*. Philipp Reclam jun., Leipzig, 1979.

[15] Reinhard Kleinknecht. Referentielle und substitutionelle semantik. In *[24]*, pages 201–214, 1998.

[16] Ran Lanzet and Hanoch Ben-Yami. Logical inquiries into a new formal system with plural reference. In *[13]*, pages 173–223. 2004.

[17] Hugues Leblanc. Alternatives to standard first-order semantics. In *[10]*, pages 189–274, 1983.

[18] Jan Łukasiewicz. *Aristotle‘s Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1957.

[19] Karl Marx. *Das Kapital I*, volume 23 of *Karl Marx, Friedrich Engels: Werke*. Dietz Verlag, Berlin, 1979.

[20] Roman Murawski and Thomas Bedürftig. Die Entwicklung der Symbolik in der Logik und ihr philosophischer Hintergrund. *Mathematische Semesterberichte*, 42(1):1–31, 1995.

[21] Platon. *Der Staat*. Philipp Reclam jun., Leipzig, 1988.

[22] Willard Van Orman Quine. *From a Logical Point of View*, chapter On What There Is, pages 1–19. Harvard University Press, Cambridge/Mass. and London, 1980.

[23] Bertrand Russell. On denoting. *Mind*, pages 479–493, October 1905.

[24] Uwe Scheffler and Klaus Wuttich, editors. *Terminigebrauch und Folgebeziehung*, Berlin, 1998. Logos Verlag.

[25] Gila Sher and Richard Tieszen, editors. *Between Logic and Intuition*, Cambridge, 2000. Cambridge University Press.

[26] Fred Sommers and Georg Englebretsen. *An Invitation to Formal Reasoning*. Ashgate Publishing, Aldershot, 2000.