Mengen, Theorien, Modelle

Ein Crashkurs in formaler Logik

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

April 2011

Georg Cantor

Menge nennt man jede Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens zu einer Gesamtheit.

Element heißen die zusammengefassten Objekte einer Menge.

Wohlunterschiedenheit bewirkt, daß jedes Element genau einmal in der Menge ist.

Angenommen, es gibt eine (offene) Aussage $P(x)$ über einen Grundbereich D. Dann kann man Cantors Idee folgendermaßen aufschreiben:

(1) $\exists M \forall x\, (x \in M \equiv P(x))$

(Jede Eigenschaft beschreibt eine Menge, jede Menge repräsentiert eine Eigenschaft.)

Relationen zwischen Mengen, spezielle Mengen

Identisch sind zwei Mengen, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen.

(2) $M_1 = M_2 \quad =_{dfn} \quad \forall x\, (x \in M_1 \equiv x \in M_2)$

Untermenge einer Menge M_2 ist M_1 dann, wenn alle ihre Elemente auch Elemente von M_2 sind.

(3) $M_1 \subseteq M_2 \quad =_{dfn} \quad \forall x\, (x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$

Leer heißt die Menge, die keine Elemente enthält.

(4) $\sim\exists x\; x \in \emptyset$

Universal heißt die Menge, die alle Elemente enthält.

(5) $\forall x\; x \in \mathcal{U}$

Operationen über Mengen

Schnittmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element beider Mengen sind.

(6) $M_1 \cap M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$

Vereinigungsmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element wenigstens einer der Mengen sind.

(7) $M_1 \cup M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$

Differenzmenge zweier Mengen ist die Menge der Elemente, die im Minuend aber nicht im Subtrahent enthalten sind.

(8) $M_1 \backslash M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$

Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller ihrer Untermengen.

(9) $\mathcal{P}(M) \quad =_{dfn} \quad \{X : X \subseteq M\}$

Tupel, Kartesisches Produkt

Geordnetes Paar heißt eine Zweiermenge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt.

(10) $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \quad =_{dfn} \quad x = x_1$ und $y = y_1$

$$\langle x, y\rangle \quad =_{dfn} \quad \{x, \{x, y\}\}$$

Geordnetes n-Tupel heißt eine n-Menge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt.

(11) $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$

$$=_{dfn} \quad x_1 = y_1 \ldots x_n = y_n$$

Kartesisches Produkt von n Mengen heißt die Menge aller (geordneten) n-Tupel aus je einem Element jeder Menge.

(12) $M_1 \times \ldots \times M_n \quad =_{dfn}$

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_1 \in M_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x_n \in M_n\}$$

Relationen

Relation auf (zwischen) n Mengen nennt man jede Untermenge des n-stelligen kartesischen Produktes der Mengen.

n-**stellige Relation** auf einer Menge nennt man jede Untermenge des n-fachen kartesischen Produktes der Menge mit sich selbst.

(13) $R(M_1, \ldots, M_n) \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$

Funktionen

Funktion (eindeutige Abbildung) von einer Urbildmenge (Definitionsbereich, domain) in eine Abbildmenge (Wertebereich, range) ist eine Untermenge ihres kartesischen Produktes, wobei für jedes Element des Definitionsbereiches genau ein Element in der Untermenge ist.

(14) $F(M_1, M_2) \subseteq M_1 \times M_2$ und

$$\forall x \in M_1 \exists y \in M_2 : \langle x, y \rangle \in F(M_1, M_2) \quad \text{und}$$

$\forall x \in M_1 {\sim} \exists y, y_1 \in M_2 :$
$\langle x, y \rangle \in F(M_1, M_2)$ und $\langle x, y_1 \rangle \in F(M_1, M_2)$
und $y \neq y_1$

Mengengröße

Umkehrfunktion einer Funktion $f : M_1 \to M_2$ nennt man die Funktion $f^{-1} : M_2 \to M_1$, die aus den „umgedrehten" geordneten Paaren besteht.

(15) $f^{-1} \quad =_{dfn} \quad \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in f\}$

Eineindeutig heißt eine Funktion, die eine Umkehrfunktion hat.

Gleichmächtig heißen Mengen, wenn es eine eineindeutige Funktion von einer in die andere gibt.

(16) $M_1 \sim M_2 \quad =_{dfn}$

es gibt eine 1-1-Abbildung von M_1 auf M_2

Eine Sprache — mengentheoretisch, Alphabet

IV	eine Menge von Zeichen (für Individuenvariablen)
IK	eine Menge von … Individuenkonstanten
FK	eine Menge von … funktionalen Konstanten
PK	eine Menge von … Prädikatkonstanten
$\{), (\}$	eine Menge von … Klammern
$\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$	eine Menge von … logischen Konstanten
$\{\forall, \exists\}$	eine Menge von … logischen Konstanten

Eine Sprache — mengentheoretisch, Terme

In der Menge der Terme sind die Individuenzeichen und Ausdrücke, die aus der passenden Anzahl von Termen und funktionalen Konstanten gebildet werden.

$$(17)\quad \tau \in T \quad =_{dfn} \quad \begin{cases} 1. & \tau \in IV \text{ oder } \tau \in IK, \text{ dann } \tau \in T \\ 2. & \tau_1, \ldots, \tau_n \in T \text{ und } \vartheta^n \in FK, \text{ dann} \\ & \vartheta^n(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T \end{cases}$$

Eine Sprache — mengentheoretisch, Aussagen

In der Menge der prädikatenlogischen Formeln sind die prädikativen Ausdrücke und Ausdrücke, die aus diesen mit den logischen Konstanten gebildet werden.

$$\phi \in PF \quad =_{dfn} \quad \phi = \pi^n(\tau_1, \ldots, \tau_n), \\ \text{mit } \pi^n \in PK \text{ und } \tau_1, \ldots, \tau_n \in T$$

(18) $$\phi \in PLF \quad =_{dfn} \quad \begin{cases} 1. \quad \phi \in PF, \text{ dann} \phi \in PLF \\ 2. \quad \phi_1 \in PLF \text{ und } \phi_2 \in PLF, \text{ dann} \\ \qquad {\sim}\phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), \\ \qquad (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \equiv \phi_2) \in PLF \\ 3. \quad \phi \in PLF \text{ und } \tau \in IV, \text{ dann} \\ \qquad \forall\tau\phi, \exists\tau\phi \in PLF \end{cases}$$

Eine Theorie, mengentheoretisch

Theorie nennt man eine deduktiv abgeschlossene Satzmenge: Die Menge aller Aussagen, die die Axiome enthält und alle Formeln, die aus ihnen mit Regeln abgeleitet werden können.

Axiome
$(\phi \to (\psi \to \phi))$
$((\phi \to (\psi \to \varphi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \varphi)))$
$((\sim\psi \to \sim\phi) \to ((\sim\psi \to \phi) \to \psi))$
$(\forall\tau\phi \to \phi(\tau/\tau_1))$
(mit τ_1 ein Term, der frei ist für die Variable τ)
$(\forall\tau(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall\tau\psi))$ (mit τ nicht frei in ϕ)

Regeln
$(\phi \to \psi), \phi \vdash \psi$
$\phi \vdash \forall\tau\phi$

Eine Beispieltheorie

Alphabet

$$
\begin{aligned}
IV &= \{x, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \quad y, y_1, \ldots, y_n, \ldots\} \\
IK &= \{\bullet\} \\
PK &= \{\circeq\} \\
FK &= \{\prime, \oplus, \odot\}
\end{aligned}
$$

Vereinbarungen Wir schreiben:

$\tau_1 \circeq \tau_2$	anstelle von	$\circeq(\tau_1, \tau_2)$
τ'	anstelle von	$\prime(\tau)$
$\tau_1 \oplus \tau_2$	anstelle von	$\oplus(\tau_1, \tau_2)$
$\tau_1 \odot \tau_2$	anstelle von	$\odot(\tau_1, \tau_2)$

Axiome der Beispieltheorie (plus Logik)

$$\forall x \;\; x \doteq x$$

$$x \doteq y \rightarrow (\phi(x,x) \rightarrow \phi(x,y))$$

$$x_1 \doteq x_2 \rightarrow (x_1 \doteq x_3 \rightarrow x_2 \doteq x_3)$$

$$x_1 \doteq x_2 \rightarrow x_1' \doteq x_2'$$

$$\bullet \not\doteq x'$$

$$x_1' \doteq x_2' \rightarrow x_1 \doteq x_2$$

$$x \oplus \bullet \doteq x$$

$$x_1 \oplus x_2' \doteq (x_1 \oplus x_2)'$$

$$x \odot \bullet \doteq \bullet$$

$$x_1 \odot x_2' \doteq (x_1 \odot x_2) \oplus x_1$$

Für alle ϕ : $\quad \phi(\bullet) \rightarrow (\forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \forall x \phi(x))$

Strukturen

n-stell. Operation auf einer Menge M werden die Funktionen von M^n in M genannt.

$$o^n : \overbrace{M \times \ldots \times M}^{n\text{-mal}} \longrightarrow M$$

n-stell. Relation auf einer Menge M werden die Untermengen von M^n genannt.

$$R^n \subseteq \overbrace{M \times \ldots \times M}^{n\text{-mal}}$$

Struktur heißt eine Menge mit Mengen von Relationen, Operationen und ausgezeichneten Elementen.

$$\Sigma = (M, R_1, \ldots, R_m, o_1, \ldots, o_n, e_1, \ldots, e_l)$$

Unterstrukturen

Unterstruktur für eine Struktur Σ ist die Struktur Σ' genau dann, wenn

1. $M' \subseteq M$
2. für alle $x_1, \ldots, x_i \in M'$: $R'_k(x_1, \ldots, x_i) \iff R_k(x_1, \ldots, x_i)$
3. für alle $x_1, \ldots, x_i, x_{i+1} \in M'$: $o'_k(x_1, \ldots, x_i) = x_{i+1} \iff o_k(x_1, \ldots, x_i) = x_{i+1}$
4. für alle i : $e'_i = e_i$

Beispiel

	Σ'	Σ
Trägermenge	$\mathbf{N}$	$\mathbf{R}$
Relationen	$\leq$	$\leq$
Operationen	$+$	$+$
ausgezeichnete Elemente	0	0

Isomorphismen

Isomorph sind zwei Strukturen, wenn ihre Elemente eineindeutig aufeinander abbildbar sind.

(19)

$\Sigma' \cong \Sigma \quad =_{dfn} \quad$ es gibt eine eineindeutige Abbildung $f : M \leftrightarrow M'$ mit:

1. $R'_i(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \Leftrightarrow R_i(x_1, \ldots, x_n)$
2. $o'_i(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = f(x_{n+1}) \Leftrightarrow$
   $o_i(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$
3. $f(e_i) = e'_i$

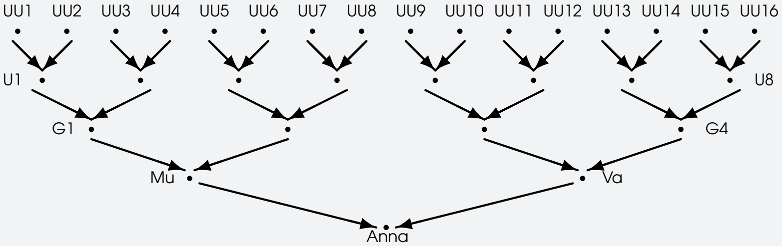
Eigenschaften zeigen, daß isomorphe Strukturen gewissermaßen „gleich" sind:

$$\Sigma \cong \Sigma$$

$$\Sigma' \cong \Sigma'' \Rightarrow \Sigma'' \cong \Sigma'$$

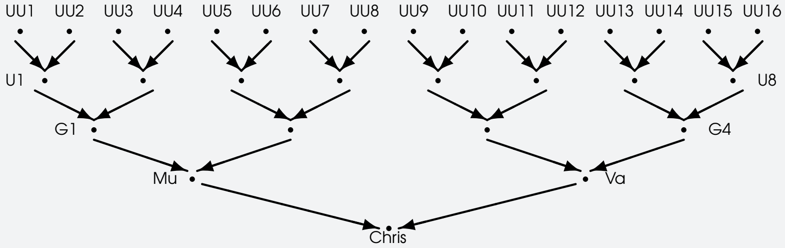
$$\Sigma' \cong \Sigma'' \& \Sigma'' \cong \Sigma''' \Rightarrow \Sigma' \cong \Sigma'''$$

Beispiel Isomorphismus, eine Struktur



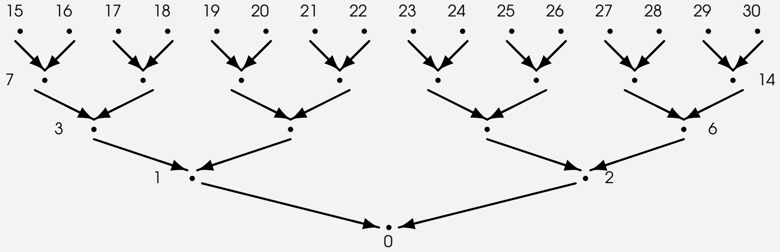
M	Anna und ihre Vorfahren bis in die 4. Generation
ausgezeichnetes Element e_1	Anna
eine Relation R_1	männlich sein
eine Relation R_2	… ist Tochter von …
eine Operation o	ist Vater von …

Beispiel Isomorphismus, eine weitere Struktur



M	Chris und ihre Vorfahren bis in die 4. Generation
ausgezeichnetes Element e_1	Chris
eine Relation R_1	männlich sein
eine Relation R_2	… ist Tochter von …
eine Operation o	ist Vater von …

Beispiel Isomorphismus, noch eine weitere Struktur



M	31 Zahlen
ausgezeichnetes Element e_1	0
eine Relation R_1	gerade sein
eine Relation R_2	… ist ist ungerade oder 0 und eins kleiner als …
eine Operation o	addiere 2 zu … , falls es kleiner als 15 ist

Modelle

Modell (ganz grob) einer Theorie ist eine Struktur, in der alle Sätze der Theorie wahr sind. Etwas, was von der Theorie beschrieben wird.

Modell $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$ ist ein Paar aus einer Menge $\mathfrak{D}$ (Domain, Interpretationsbereich) und einer Funktiion $\mathfrak{I}$ (Interpretation, Interpreationsfunktion), für die gilt:

1. $\mathfrak{D} \neq \emptyset$.
2. Wenn $\tau \in IK$, dann $\mathfrak{I}(\tau) \in \mathfrak{D}$.
3. Wenn $\vartheta^n \in FK$, dann ist $\mathfrak{I}(\vartheta^n)$ n-stellige Operation auf $\mathfrak{D}$.
4. Wenn $\pi^n \in PK$, dann ist $\mathfrak{I}(\pi^n)$ n-stellige Relation auf $\mathfrak{D}$.

Variablenbelegung $\mathfrak{V}$ schreibt Variablen Werte aus $\mathfrak{D}$ zu: Wenn $\tau \in IV$, dann $\mathfrak{V}(\tau) \in \mathfrak{D}$.

τ-Variante $\mathfrak{V}_\tau$ einer Belegung $\mathfrak{V}$ unterscheidet sich von der Ausgangsbelegung höchstens im Wert für τ.

Werte von Termen und Prädikatformeln

Ziel: ein Modell für die Prädikatenlogik 1. Stufe (first order logic, klassische Quantorenlogik)

Terme Sei $\vartheta \in FK$ n-stellig und $\tau_1, \ldots, \tau_n \in IV \cup IK$.
Dann ist der Wert[1]
$\mathfrak{I}, \mathfrak{V}(\vartheta(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \mathfrak{I}(\vartheta)(\mathfrak{I}^*(\tau_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(\tau_n))$,
wobei $\mathfrak{I}^*(\tau) = \begin{cases} \mathfrak{I}(\tau) & \text{falls } \tau \in IK \\ \mathfrak{V}(\tau) & \text{falls } \tau \in IV \end{cases}$

Prädikatformel Sei $\pi \in PK$ n-stellig und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Terme.
Dann ist $(\pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ genau dann gültig in $\mathfrak{M}$ unter $\mathfrak{V}$, wenn)

$$\mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{V}(\pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \mathfrak{t} \Leftrightarrow \langle \mathfrak{I}, \mathfrak{V}(\tau_1), \ldots, \mathfrak{I}, \mathfrak{V}(\tau_n) \rangle \in \mathfrak{I}(\pi)$$

---

[1] Das ist nicht völlig korrekt aufgeschrieben. Wir müssen den Fall alleinstehender IV und IK, sowie auch ineinander verschachtelte Terme betrachten. Die entsprechende (induktive) Definition sollte einigermaßen klar sein.

Gültig (erfüllt) im Modell (Tarski)

$$
\begin{aligned}
(20)\; \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \pi(\tau_1, \ldots, \tau_n) &\iff \mathfrak{D}, \mathfrak{I}, \mathfrak{V}(\pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \mathfrak{t} \\
\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models {\sim}\phi &\iff \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \phi \\
\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \phi \to \psi &\iff \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \phi \text{ oder } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \psi \\
\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall\tau\phi &\iff \text{für alle } \mathfrak{V}_\tau : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_\tau \models \phi
\end{aligned}
$$

Allgemeingültigkeit

Erfüllbar (satisfiable) ist eine Formel, wenn es ein Modell und eine Belegung so gibt, daß sie im Modell unter der Belegung erfüllt ist.

Wahr ist eine Formel im Modell, wenn sie unter jeder Belegung im Modell erfüllt ist.

Allgemeingültig (tautologisch) ist eine Formel, wenn sie in jedem Modell unter jeder Belegung erfüllt ist.

Bibliographie

Günter Asser.
Grundbegriffe der Mathematik.
Studienbücherei. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.

Maria Hasse.
Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik.
Mathematische Schülerbücherei. Teubner, 1981.

Elliott Mendelson.
Introduction to Mathematical Logic.
D. Van Nostrand Company, New York/Cincinnati/Toronto/London/Melbourne, 1979.

Max Urchs.
Klassische Logik.
Akademie Verlag, Berlin, 1993.