System des Natürlichen Schließens

Victoria Glatz

(Technische Universität Dresden)

Dezember 2012

Was wir bis jetzt können...

Wir können (indirekt) zeigen, dass

- eine Formel A **allgemeingültig** ist: $\models A$
- eine Formel A **kontradiktorisch** ist: $\perp A$
- eine Formel A **logisch** aus einer endlichen Formelmenge Γ **folgt**: $\Gamma \models A$
- eine Formelmenge Γ **inkonsistent** ist: es gibt A so, dass: $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models {\sim}A$
- zwei Formeln A und B **logisch äquivalent** sind: $A \approx B$

Das hat alles was mit Wahrheit/Gültigkeit in Modellen zu tun!

Wir wollen mehr...

Sei Γ endlich. $\Gamma \models A$ ist *nur* eine Aussage über Modelle. Kann man von Γ aus **direkt** auf A kommen, d.h. A aus Γ heraus **beweisen**?

JA! Aber **wie?**:
Man setzt alle Formeln aus Γ als Prämissen. Dann findet man einen Satz von Regeln, die als Beweisregeln akzeptiert werden können.

Kann man alles, was logisch folgt, auch beweisen und umgekehrt?

Wie sieht so ein Beweis aus?

Ein **Beweis** $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist eine endliche Folge von 4-Tupeln aus

- einer Zeilennummer
- einer Menge von Abhängigkeiten
- einer Formel
- einer Rechtfertigung der Formel

wobei die Formel selbst Annahmeformel, Hypothese aufgrund einer Regel, aus vorhergehenden Zeilen nach Regeln gewonnen oder Theorem ist. Der Beweis ist beendet, wenn B als Formel in einer Beweiszeile mit höchstens den Abhängigkeiten $\{A_1, \ldots, A_n\}$ erhalten worden ist.

Beispiel:

7. $\{1, 2\}$ $P(a) \wedge P(b)$ **E** $\wedge$

Einführung der Konjunktion

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i & \\ j. & \{\Delta\} & A_j & \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_i \wedge A_j & \mathbf{E} \wedge i, j \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Anna ist schön.} \\ \text{Anna ist groß.} \\ \hline \text{Also: Anna ist schön und groß.} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1. & \{1\} & P(a) & \textit{Ann.} \\ 2. & \{2\} & Q(a) & \textit{Ann.} \\ 3. & \{1,2\} & P(a) \wedge Q(a) & \mathbf{E} \wedge 1, 2 \end{array}$$

Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{i.\quad \{\Gamma\}\quad A_i \wedge A_j}{j.\quad \{\Gamma\}\quad A_i \qquad \mathbf{B}\ \wedge\ i} \qquad\qquad \frac{i.\quad \{\Gamma\}\quad A_i \wedge A_j}{j.\quad \{\Gamma\}\quad A_j \qquad \mathbf{B}\ \wedge\ i}$$

Anna mag Bodo und Bert.

Anna mag Bodo.
Anna mag Bert.

1.	$\{1\}$	$P(a,b_1) \wedge P(a,b_2)$	*Ann.*
2.	$\{1\}$	$P(a,b_1)$	$\mathbf{B}\ \wedge\ 1$
3.	$\{1\}$	$P(a,b_2)$	$\mathbf{B}\ \wedge\ 1$

Einführung der Adjunktion

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_i}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i}$$

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_j}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i}$$

$$\frac{\text{Anna ist Studentin.}}{\text{Anna ist Studentin oder Popstar.}}$$

1.	$\{1\}$	$P(a)$	*Ann.*
2.	$\{1\}$	$P(a) \vee R(a)$	$\mathbf{E} \vee 1$

Beseitigung der Adjunktion

$i.$	$\{\Gamma\}$	$A_i \supset A$	
$j.$	$\{\Delta\}$	$A_j \supset A$	
$k.$	$\{\Xi\}$	$A_i \vee A_j$	
$l.$	$\{\Gamma, \Delta, \Xi\}$	A	**B** $\vee\ i, j, k$

Wenn Anna Bodo sieht, ist sie glücklich.
Wenn Anna Bert sieht, ist sie glücklich.
Anna sieht Bodo oder Bert.

Anna ist glücklich.

1.	$\{1\}$	$P(a, b_1) \supset Q(a)$	*Ann.*
2.	$\{2\}$	$P(a, b_2) \supset Q(a)$	*Ann.*
3.	$\{3\}$	$P(a, b_1) \vee P(a, b_2)$	*Ann.*
4.	$\{1, 2, 3\}$	$Q(a)$	**B** $\vee$ 1, 2, 3

Einführung der Subjunktion

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Gamma \backslash i\}$	$A_i \supset A_j$	E $\supset$, i, j

Angenommen, Dresden läge am Meer...
...Ich könnte baden gehen.

Wenn Dresden am Meer liegen würde, dann könnte ich baden gehen.

1.	$\{1\}$	$P(a)$	*Hypothese*
$\vdots$			
4.	$\{1\}$	$Q(b)$	
5.	$\emptyset$	$P(a) \supset Q(b)$	$\mathbf{E} \supset 1, 4$

Beseitigung der Subjunktion

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A_j & \\ j. & \{\Delta\} & A_i & \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_j & \mathrm{B} \supset,\ i, j \end{array}$$

Wenn Anna Bodo liebte, dann
wäre Bodo glücklich.
Anna liebt Bodo.

Bodo ist glücklich.

1.	$\{1\}$	$P(a,b) \supset Q(b)$	*Ann.*
2.	$\{2\}$	$P(a,b)$	*Ann.*
3.	$\{1,2\}$	$Q(b)$	**B** $\supset 1,2$

Einführung der Negation

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese	
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j		
$k.$	$\{\Delta\}$	$\sim A_j$		
$l.$	$\{\Gamma, \Delta \backslash i\}$	$\sim A_i$		$\mathbf{E} \sim i, j, k$

Angenommen, Dresden läge in der Karibik.
Dann wäre es hier warm.
Dann könnte ich baden gehen.
Ich kann nicht baden gehen.

Also liegt Dresden nicht in der Karibik.

Einführung der Negation, Beispiel

$\vdots$			
3.	$\{3\}$	$P(a)$	*Hypothese*
$\vdots$			
4.	$\{1,3\}$	$Q(a)$	*Zeile* $1,3$
5.	$\{1,2,3\}$	$R(b)$	*Zeile* $2,4$
$\vdots$			
8.	$\{1,2\}$	$\sim R(b)$	*Zeile* $1,2$
9.	$\{1,2\}$	$\sim P(a)$	**E** $\sim 3,5,8$

Beseitigung der Negation

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad {\sim}{\sim}A_i}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \qquad\qquad \mathbf{B}\ {\sim}i}$$

Die Welt ist nicht unerkennbar.

Sie ist erkennbar.

1.	$\{1\}$	${\sim}{\sim}R(a)$	*Ann.*
2.	$\{1\}$	$R(a)$	$\mathbf{B}\ {\sim}1$

Einführung des Allquantors

$$\frac{k.\quad \{\Gamma\}\quad A}{l.\quad \{\Gamma\}\quad \forall iA \qquad \mathbf{E}\,\forall^*\ k}$$

Die Variable i, über die generalisiert wird, darf in keiner der Formeln, auf die $\{\Gamma\}$ verweist, frei vorkommen.

$$\frac{\text{Griechen sind Menschen.}}{\text{Alle Griechen sind Menschen.}}$$

$\vdots$

4. $\{1, 2\}\quad P(x) \supset Q(x)$
5. $\{1, 2\}\quad \forall x(P(x) \supset Q(x)) \qquad \mathbf{E}\,\forall 4$

Falls x in $1, 2$ nicht frei.

Beseitigung des Allquantors

$$\begin{array}{llll} k. & \{\Gamma\} & \forall i A & \\ \hline l. & \{\Gamma\} & A(i/j) & \mathbf{B}\forall\, k \end{array}$$

$$\frac{\text{Alles bewegt sich.}}{\text{Anna bewegt sich.}}$$

1.	$\{1\}$	$\forall x P(x)$	*Ann.*
2.	$\{1\}$	$P(a)$	$\mathbf{B}\forall 1$

Einführung des Existenzquantors

$$\frac{k. \quad \{\Gamma\} \quad A(i/j)}{l. \quad \{\Gamma\} \quad \exists i A(i) \qquad \mathbf{E}\,\exists\; k}$$

$$\frac{\text{Der Erstbeweger hat keine Ursache.}}{\text{Es gibt etwas, das keine Ursache hat.}}$$

1.	$\{1\}$	$\sim P(a)$	*Ann.*
2.	$\{1\}$	$\exists x \sim P(x)$	$\mathbf{E}\,\exists 1$

Beseitigung des Existenzquantors

$k.$	$\{\Gamma\}$	$\exists i A_1$	
$l.$	$\{l\}$	$A_1(i/j)$	Hypothese
$m.$	$\{\Delta, l\}$	A_2	
$n.$	$\{\Gamma, \Delta\}$	A_2	**B** $\exists^{**}$ k, l, m

Mit dem ersten Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile l angezeigt: j ist eine Individuenkonstante, die **neu** im Beweis ist.

Mit dem zweiten Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile m angezeigt: j darf **nicht** in A_2 vorkommen.

Es gibt eine Ursache für alles.
Angenommen, Gott ist diese Ursache für alles.
Dann ist Gott auch Ursache seiner selbst.

Dann gibt es etwas, was Ursache seiner selbst ist.

Beseitigung des Existenzquantors, Beispiel

1.	$\{1\}$	$\exists x P(x)$	*Ann.*
2.	$\{2\}$	$P(a)$	*Hypothese*
$\vdots$			
6.	$\{2\}$	$Q(a)$	
7.	$\{2\}$	$\exists x Q(x)$	
8.	$\{1\}$	$\exists x Q(x)$	**B** $\exists 1, 6, 7$