# Identität

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Januar 2011

Logische Philosophie

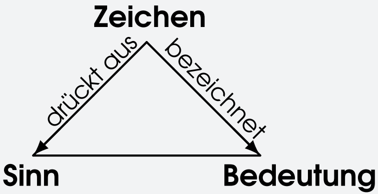
# Freges Problem

1. Der Morgenstern ist der Morgenstern.
2. Der Morgenstern ist der Abendstern.

1. ist tautologisch.
2. ist nur in Welten gültig, in denen der erste Stern am Abend auch der letzte am Morgen ist.
1. ist analytisch.
2. ist (möglicherweise) eine echte Entdeckung.

# Freges Dreieck

*Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinen Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung.* (Frege)

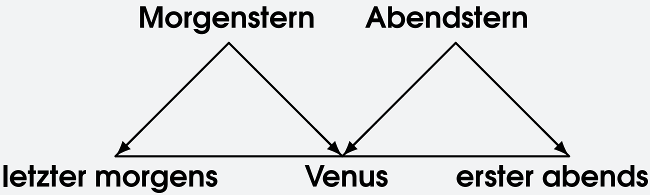


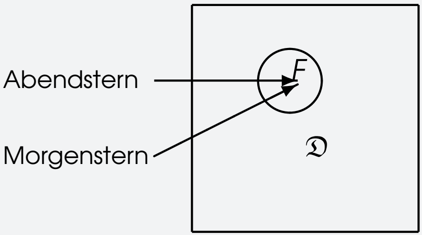

**Sinn** ist die Art des Gegebenseins der Bedeutung

**Bedeutung** ist der bezeichnete Gegenstand

# Sterne

*… eine Beziehung eines Dinges zu sich selbst ausgedrückt, und zwar eine solche, in der jedes Ding mit sich selbst, aber kein Ding mit einem anderen steht.* (Frege)




**<u>Grundsätze</u>**

Wenn $i = j$, dann werden $i, j$ auf das gleiche Element aus $\mathfrak{D}$ interpretiert.

Wenn $i = j$, dann kann jede Eigenschaft $F$, für die $F(i)$ gilt, auch $j$ zugeschrieben werden.

# Aristoteles (Topik)

Das Identische, um es nur in einem allgemeinen Umriß zu beschreiben, scheint drei verschiedene Bedeutungen zu haben. Wir nennen etwas identisch der Zahl oder der Art oder der Gattung nach: der Zahl nach identisch das, was mehr als einen Namen hat, aber nur ein Ding ist, . . . ; der Art nach, was mehr als eines ist, aber keinen Unterschied in der Art aufweist, . . . der Gattung nach identisch, was unter dieselbe Gattung fällt, . . .

# Aristoteles (Topik)

Ob aber etwas mit etwas identisch oder von ihm verschieden ist ... muß man nach den Beugungsformen, dem Begriffsverwandten und dem Entgegengesetzten beurteilen. ... Endlich muß man die Identität beurteilen nach dem Hervorbringenden und Zerstörenden, dem Werden und Vergehen und überhaupt nach allem, was zu beiden das gleiche Verhältnis hat: bei allem, was schlechthin identisch ist, ist es auch sein Werden und Vergehen, was es hervorbringt und was es zerstört. Man muß auch sehen, ob, falls von zwei Dingen eines irgend etwas am meisten sein soll, auch von dem anderen in ebendieser Hinsicht das Prädikat „am meisten" gilt ...

Überhaupt muß man alles ins Auge fassen, was wie immer von jedem der beiden ausgesagt wird und wovon beide ausgesagt werden, und muß sehen, ob irgendwo die Übereinstimmung fehlt. Was von dem einen, muß von dem anderen, und wovon das eine, von dem muß auch das andere ausgesagt werden.

# Bisubjunktion, Äquivalenz, Identität

Bisubjunktion ist ein aussagenbildender Operator, gehört zur Sprache. Falls $A \equiv B$ wahr ist, besagt das, daß $A$ und $B$ beide wahr oder beide falsch sind.

Äquivalenz ist eine Relation auf der Menge der Formeln, gehört zur Metasprache. $A \approx B$ besagt, daß die Formeln bewertungsgleich in allen Modellen sind.

Identität ist eine Relation auf der Menge der Gegenstände aus dem Universum, gehört zur Sprache. $i = j$ besagt, daß $i$ und $j$ gleich interpretiert sind.

**Alphabet:** Das Zeichen $=$ wird als konstantes Prädikat zur Sprache hinzugefügt.

**Formeldefinition:** Wenn $i, j$ Individuenvariablen oder -konstanten sind, dann ist $i = j$ prädikatenlogische Formel.

# Semantik und Regeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models i = j$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}^*(i) \doteq \mathfrak{I}^*(j)$, wobei

$$\mathfrak{I}^*(k) = \begin{cases} \mathfrak{I}(k) & \text{falls } k \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{v}(k) & \text{falls } k \text{ eine Individuenvariable ist} \end{cases}$$

und $\doteq$ eine Identitätsrelation in der Metasprache ist.

$i = i$ **(Ref)**

$i = j \supset (A(i) \equiv A[i/j])$, wobei $A$ eine atomare Formel ist und $A[i/j]$ die Ersetzung von irgendwelchen Vorkommen der freien Individuenvariablen oder der Individuenkonstanten $i$ durch den für die Substitution freien Term $j$ bezeichnet. **(Sub)**

$$\frac{\begin{array}{cc} \Gamma & i = j \\ \Delta & A \end{array}}{\Gamma, \Delta \quad A[i/j]} \quad \textbf{(Sub)}$$

# Allgemeingültigkeit, Beweisbarkeit

$$\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \forall x \forall y(x = y \supset y = x)$ | Prämisse |
| 2. | für ein $\mathfrak{v}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_x \not\models \forall y(x = y \supset y = x)$ | $1, \forall$ |
| 3. | für ein $\mathfrak{v}_x,$ für ein $\mathfrak{v}_{xy} : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \not\models (x = y \supset y = x)$ | $2, \forall$ |
| 4. | für ein $\mathfrak{v}_x,$ für ein $\mathfrak{v}_{xy} : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \models x = y$ | $3 \supset$ |
| 5. | für dasselbe $\mathfrak{v}_x,$ für dasselbe $\mathfrak{v}_{xy} : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \not\models y = x$ | $3 \supset$ |
| 6. | $\mathfrak{v}_{xy}(x) \doteq \mathfrak{v}_{xy}(y)$ | 4, Id |
| 7. | $\mathfrak{v}_{xy}(y) \dot{\neq} \mathfrak{v}_{xy}(x)$ | 5, Id |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\{1\}$ | $x = y$ | Hypothese |
| 2. | $\{\}$ | $x = x$ | Ref |
| 3. | $\{\}$ | $x = y \supset (x = x \equiv y = x)$ | Sub |
| 4. | $\{1\}$ | $(x = x \equiv y = x)$ | $\mathbf{B} \supset 1, 3$ |
| 5. | $\{1\}$ | $x = x \supset y = x$ | abgeleitete Regel |
| 6. | $\{1\}$ | $y = x$ | $\mathbf{B} \supset 2, 5$ |
| 7. | $\{\}$ | $x = y \supset y = x$ | $\mathbf{E} \supset 1, 6$ |
| 8. | $\{\}$ | $\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$ | $2 \times \mathbf{E}\, \forall$ |

# Hegel

> Alle Dinge sind verschieden, oder: Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind. – Dieser Satz ist in der Tat dem Satze der Identität entgegengesetzt, denn er sagt aus: $A$ ist ein Verschiedenes, also $A$ ist auch nicht $A$; oder $A$ ist einem andern ungleich, ...

1. Alle Dinge sind verschieden.
2. Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind.
3. $A$ ist ein Verschiedenes.
4. $A$ ist auch nicht $A$.
5. $A$ ist einem anderen ungleich.

Das Zitat läßt sich nur so interpretieren, daß die fünf Formulierungen untereinander äquivalent sind und daß sie dem Satz von der Identität ($A = A$) „entgegengesetzt“ sind.

# Alle Dinge sind verschieden.

Alle Dinge sind von sich selbst verschieden: $\forall x \sim x = x$
Alle Dinge sind untereinander verschieden: $\forall x \forall y \sim x = y$

Beide sind **Kontradiktionen**:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\{\}$ | $\forall x\, x = x$ | Ref |
| 2. | $\{\}$ | $x = x$ | **B** $\forall$ |
| 3. | $\{3\}$ | $\forall x \sim x = x$ | Hypothese |
| 5. | $\{3\}$ | $\sim x = x$ | **B** $\forall$ |
| 6. | $\{\}$ | $\sim \forall x \sim x = x$ | **E** $\sim$ |

| | |
|---|---|
| $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \forall x \forall y \sim x = y$ | Annahme |
| $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_x \models \forall y \sim x = y$ | für alle $\mathfrak{v}_x$ |
| $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \models \sim x = y$ | für alle $\mathfrak{v}_{xy}$ |
| $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \not\models x = y$ | für alle $\mathfrak{v}_{xy}$ |
| $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}_{xy} \models x = y$ | für kein $\mathfrak{v}_{xy}$ |
| $\langle \mathfrak{v}_{xy}(x), \mathfrak{v}_{xy}(y) \rangle \in \mathfrak{I}(=)$ | für kein $\mathfrak{v}_{xy}$ |

Für alle $\mathfrak{v}_{xy}(x) \doteq \mathfrak{v}_{xy}(y)$ gilt jedoch $\langle \mathfrak{v}_{xy}(x), \mathfrak{v}_{xy}(y) \rangle \in \mathfrak{I}(=)$.

**Der Satz ist also in beiden Interpretationen dem Satz von der Identität buchstäblich „entgegengesetzt“, aber auch logisch falsch.**

# Es gibt nicht zwei Dinge, die einander gleich sind.

**Interpretation:** Es gibt nicht zwei numerisch verschiedene Dinge, die identisch sind – $\sim\exists x \exists y(\sim x = y \wedge x = y)$.

**Anzahlaussagen**

Es gibt (mindestens) zwei Bücher.

$$\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge \sim x = y)$$

Anna hat höchsten drei Freunde.

$$\forall x \forall y \forall z \forall x_1 (Q(a, x) \wedge Q(a, y) \wedge Q(a, z) \wedge Q(a, x_1) \supset x = y \vee y = z \vee x = z \vee x = x_1 \vee y = x_1 \vee z = x_1)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\emptyset$ | $x = y \vee \sim x = y$ | Theo: AL |
| 2. | $\emptyset$ | $\sim(\sim x = y \wedge x = y)$ | 1, Theo |
| 3. | $\emptyset$ | $\forall x \forall y \sim(\sim x = y \wedge x = y)$ | 2, 2 $\times$ **E** $\forall$ |
| 4. | $\emptyset$ | $\sim\exists x \exists y(\sim x = y \wedge x = y)$ | 3, Theo |

**Der Satz ist also logisch wahr, dem Satz von der Identität aber keinesfalls „entgegengesetzt“.**

# **A** ist ein Verschiedenes.

**Interpretation:** Für alles gibt es etwas, was von ihm verschieden ist – $\forall x \exists y \sim x = y$.

**Wahrheitsbedingung:**
für alle $\mathfrak{v}_x$ gibt es ein $\mathfrak{v}_{xy}$ so, daß $\mathfrak{v}_{xy}(x) \not\doteq \mathfrak{v}_{xy}(y)$ .

**Beobachtung 1:** In einer Welt $\mathfrak{D}$ mit nur einem einzigen Element kann die Bedingung nicht erfüllt werden.

**Beobachtung 2:** In einer Welt $\mathfrak{D}$ mit mehr als einem Element kann die Bedingung erfüllt werden.

**Der Satz ist weder logisch wahr noch logisch falsch, dem Satz von der Identität oder einem der Sätze bisher keinesfalls „entgegengesetzt".**

**A ist einem anderen ungleich.** – Hegels Satz 5 – ist der gleiche Satz wie der gerade betrachtete!

# **A** ist auch nicht **A**

$$
\begin{array}{ll}
 & \sim a = a \\
 & \sim x = x \\
\forall x & \sim x = x \\
\exists x & \sim x = x
\end{array}
$$

**Der Satz ist also in allen Versionen dem Satz von der Identität buchstäblich „entgegengesetzt“, aber auch logisch falsch.**

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \sim\forall x(P(x) \equiv Q(x))$$

**Der Satz ist kontingent, aber trivial. Er ist zu keinem der bisher betrachteten Sätze äquivalent, ebenso nicht zum Satz von der Identität.**

# Bestimmte Kennzeichnungen

1. Dasjenige, über welches hinaus nichts größeres gedacht werden kann, ist Gott.
2. Die erste Ursache aller Bewegung ist selbst unbewegt.

- Was, wenn es keine erste Ursache aller Bewegung gibt?
- Was, wenn es mehrere erste Ursachen aller Bewegung gibt?
- Was, wenn die erste Ursache nicht unbewegt ist?

„Die erste Ursache aller Bewegung ist selbst unbewegt“ ist genau dann wahr, wenn es genau eine Ursache aller Bewegung gibt und diese dann auch unbewegt ist.

**Definition:** „Das *i* was *G* ist ist *F*“ ist genau dann wahr, wenn es genau ein *i* gibt was *G* ist und dieses auch *F* ist.

# Die Russell-Lösung

**Übersetzen in die Sprache der Prädikatenlogik mit Identität:**

Die erste Ursache aller Bewegung ist selbst unbewegt.

erste Ursache aller Bewegung sein $\rightsquigarrow$ $P$
bewegt sein $\rightsquigarrow$ $Q$

Es gibt genau eine Ursache aller Bewegung und die ist unbewegt.

$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \supset y = x) \land Q(x))$

Der Mörder ist der Gärtner.

Mörder sein $\rightsquigarrow$ $P$
Gärtner sein $\rightsquigarrow$ $Q$

Es gibt genau einen Mörder und einen Gärtner und es ist dieselbe Person.

$\exists x \exists y(P(x) \land Q(x) \land \forall z(P(z) \supset z = x) \land \forall z(Q(z) \supset z = y) \land x = y)$

# Existenz

generelle Nicht-Existenz: Es gibt keine Kentauren.

$$\sim\exists x(\textsc{Kentaur}(x))$$

singuläre Nicht-Existenz: Es gibt Cheiron nicht.

- Sätze mit leeren Termini sind alle falsch.
- $\sim\exists x\ x = \textsc{Cheiron}$
- Den weisen und gerechten Kentauren gibt es nicht: $\sim\exists x(\textsc{Weise und Gerecht}(x) \land \textsc{Kentaur}(x))$

# Nochmal die Sterne

1. Der Morgenstern ist der Morgenstern.
2. Der Morgenstern ist der Abendstern.

1. $a = a$
2. $\exists x \exists y(\textsc{Morgenstern}(x) \wedge \textsc{Abendstern}(x) \wedge$
$$\forall z(\textsc{Morgenstern}(z) \supset z = x) \wedge$$
$$\forall z(\textsc{Abendstern}(z) \supset z = y)$$
$$\wedge x = y)$$

1. ist tautologisch.
2. ist nur in Welten gültig, in denen der erste Stern am Abend auch der letzte am Morgen ist.
1. ist analytisch.
2. ist (möglicherweise) eine echte Entdeckung.

# Venus