System des Natürlichen Schließens, Ableiten und Beweisen

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Dezember 2011

Strukturregel

Ein **Beweis** $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist eine endliche Folge von 4-Tupeln aus

einer Zeilennummer
einer Menge von Abhängigkeiten
einer Formel
einer Rechtfertigung der Formel

wobei die Formel selbst Annahmeformel, Hypothese aufgrund einer Regel, aus vorhergehenden Zeilen nach Regeln gewonnen oder Theorem ist. Der Beweis ist beendet, wenn B als Formel in einer Beweiszeile mit höchstens den Abhängigkeiten $\{A_1, \ldots, A_n\}$ erhalten worden ist.

Beispiel:
7. $\{1, 2\}$ $P(a) \wedge P(b)$ **E** $\wedge$

Subjunktion

$$\begin{array}{llll}
i. & \{i\} & A_i & \text{Prämisse/Hypothese} \\
j. & \{\Gamma\} & A_j & \\
\hline
k. & \{\Gamma \backslash i\} & A_i \supset A_j & \text{E} \supset,\ i, j
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A_j & \\
j. & \{\Delta\} & A_i & \\
\hline
k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_j & \text{B} \supset,\ i, j
\end{array}$$

Negation

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Delta\}$	$\sim A_j$	
$l.$	$\{\Gamma, \Delta \backslash i\}$	$\sim A_i$	$\mathbf{E} \sim i, j, k$

$i.$	$\{\Gamma\}$	$\sim\sim A_i$	
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_i	$\mathbf{B} \sim i$

Konjunktion

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i & \\ j. & \{\Delta\} & A_j & \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_i \wedge A_j & \mathbf{E} \wedge i, j \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \wedge A_j & \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i & \mathbf{B} \wedge i \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & A_i \wedge A_j & \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_j & \mathbf{B} \wedge i \end{array}$$

Adjunktion

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_i}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i} \qquad \frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_j}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i}$$

$$\frac{\begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A \\ j. & \{\Delta\} & A_j \supset A \\ k. & \{\Xi\} & A_i \vee A_j \end{array}}{l. \quad \{\Gamma, \Delta, \Xi\} \quad A \qquad \mathbf{B} \vee i, j, k}$$

Allquantor

$$\frac{k.\quad \{\Gamma\}\quad A}{l.\quad \{\Gamma\}\quad \forall iA \qquad \mathbf{E}\,\forall^*\ k}$$

Die Variable *i*, über die generalisiert wird, darf in keiner der Formeln, auf die $\{\Gamma\}$ verweist, frei vorkommen.

$$\frac{k.\quad \{\Gamma\}\quad \forall iA}{l.\quad \{\Gamma\}\quad A(i/j) \qquad \mathbf{B}\,\forall\ k}$$

Existenzquantor

$$\frac{k. \quad \{\Gamma\} \quad A(i/j)}{l. \quad \{\Gamma\} \quad \exists i A(i) \qquad \mathbf{E}\,\exists\; k}$$

$$\begin{array}{rlll}
k. & \{\Gamma\} & \exists i A_1 & \\
l. & \{l\} & A_1(i/j) & \text{Hypothese} \\
m. & \{\Delta, l\} & A_2 & \\
\hline
n. & \{\Gamma, \Delta\} & A_2 & \mathbf{B}\,\exists^{**}\; k, l, m
\end{array}$$

Mit dem Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile l angezeigt: *j* ist eine Individuenkonstante, die neu im Beweis ist.

Mit dem zweiten Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile m angezeigt: *j* darf nicht in A_2 vorkommen.

Einsetzung in eine Variable

$A(i/j)$ ist das Resultat der Einsetzung der Individuenvariablen oder Individuenkonstanten j an allen Stellen des freien Vorkommens der Individenvariablen i in A, wobei kein freies i-Vorkommen zu einem gebundenen j-Vorkommen werden darf.

Beispiel

1. $(P(x, a) \wedge P(x, b))(x/y)$ ist $P(y, a) \wedge P(y, b)$
2. $(P(x, a) \wedge \forall y P(x, y))(x/y)$ ist nicht $P(y, a) \wedge \forall y P(y, y)$
3. $(P(x, a) \wedge P(x, b))(x/y)$ ist nicht $P(y, a) \wedge P(x, b)$
4. $(P(x, a) \wedge P(x, b))(x/b)$ ist $P(b, a) \wedge P(b, b)$

Beispiel Ableiten

$$A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

1.	$\{1\}$	$A \vee (B \wedge C)$	Ann
2.	$\{2\}$	A	Hyp$E \supset$
3.	$\{2\}$	$A \vee B$	$2E\vee$
4.	$\{2\}$	$A \vee C$	$2E\vee$
5.	$\{2\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$3, 4E\wedge$
6.	$\emptyset$	$A \supset (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$2, 5E \supset$
7.	$\{7\}$	$B \wedge C$	Hyp$E \supset$
8.	$\{7\}$	B	$7B\wedge$
9.	$\{7\}$	C	$7B\wedge$
10.	$\{7\}$	$A \vee B$	$8E\vee$
11.	$\{7\}$	$A \vee C$	$9E\vee$
12.	$\{7\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$10, 11E\wedge$
13.	$\emptyset$	$B \wedge C \supset (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$7, 12E \supset$
14.	$\{1\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$1, 6, 13B\vee$

Beispiel Beweisen

$$\vdash \forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\exists x P(x)$$

1.	$\{1\}$	$\forall x{\sim}P(x)$	Hyp$E \supset$
2.	$\{2\}$	$\exists x P(x)$	Hyp$E{\sim}$
3.	$\{3\}$	$P(a)$	Hyp$B\exists$
4.	$\{1\}$	${\sim}P(a)$	$1B\forall$
5.	$\{3, 1\}$	${\sim}\exists x P(x)$	$2, 3, 4E{\sim}$
6.	$\{1\}$	${\sim}\exists x P(x)$	$2, 3, 5B\exists$
7.	$\emptyset$	$\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\exists x P(x)$	$1, 6E \supset$

Verwendung von Theoremen

1.	$\{1\}$	$A \supset B$	Hyp$E \supset$
2.	$\{2\}$	$\sim B$	Hyp$E \supset$
3.	$\{3\}$	A	Hyp$E\sim$
4.	$\{1,3\}$	B	$1,3B \supset$
5.	$\{1,2\}$	$\sim A$	$2,3,4E\sim$
6.	$\{1\}$	$\sim B \supset \sim A$	$2,5E \supset$
7.	$\emptyset$	$A \supset B \supset (\sim B \supset \sim A)$	

$$\sim\exists x P(x) \supset \forall x \sim P(x)$$

1.	$\{1\}$	$\sim\exists x P(x)$	Ann
2.	$\emptyset$	$P(x) \supset \exists x P(x)$	The
3.	$\emptyset$	$P(x) \supset \exists x P(x) \supset (\sim\exists x P(x) \supset \sim P(x))$	The
4.	$\{1\}$	$\sim P(x)$	$1,2,3B \supset$
5.	$\{1\}$	$\forall x \sim P(x)$	$4E\forall$
6.	$\emptyset$	$\sim\exists x P(x) \supset \forall x \sim P(x)$	$1,5E \supset$

Indirekte Beweise

Satz: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ genau dann, wenn
$A_1, \ldots, A_n, \sim B \vdash C, \sim C$ für irgendein C.

Beweis: $\boxed{\Longrightarrow}$ – B ist das C.
$\boxed{\Longleftarrow}$ – Setze in der rechten Ableitung als Hypothese **E** $\sim$, mit **E** $\sim$, **B** $\sim$ erhält man die linke Ableitung.

Anwendung: Wenn gezeigt werden soll

- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, oder
- $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B) \ldots))$

so führe $A_1, \ldots, A_n, \sim B$ zum Widerspruch.

Beispiel indirekt Beweisen

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}Q(x))$$

1.	$\{1\}$	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	Ann
2.	$\{2\}$	$\forall x{\sim}P(x)$	Ann
3.	$\{3\}$	${\sim}{\sim}\forall x{\sim}Q(x)$	Ann i.B.
4.	$\{4\}$	$P(a) \vee Q(a)$	Hyp$B\exists$
5.	$\{2\}$	${\sim}P(a)$	$2B\forall$
6.	$\emptyset$	$P(a) \vee Q(a) \supset ({\sim}P(a) \supset Q(a))$	The
7.	$\{2,4\}$	$Q(a)$	$4,5,6B\supset$
8.	$\{3\}$	$\forall x{\sim}Q(x)$	$3B{\sim}$
9.	$\{3\}$	${\sim}Q(a)$	$8B\forall$
10.	$\emptyset$	$Q(a) \wedge {\sim}Q(a) \supset R(b) \wedge {\sim}R(b)$	The
11.	$\{2,3,4\}$	$R(b) \wedge {\sim}R(b)$	$8,9,10B\supset$
12.	$\{1,2,3\}$	$R(b) \wedge {\sim}R(b)$	$1,4,11B\exists$

Das Deduktionstheorem

Satz: $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Beispiel: Anstelle von $\vdash A \supset B \supset (B \supset C \supset (A \supset C))$ zeige $A \supset B, B \supset C, A \vdash C$.

Bedeutung: Wenn $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$, dann lassen sich damit n neue *abgeleitete* Schlußregeln rechtfertigen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Gamma & A_1 \\ \hline \Gamma & A_2 \supset (A_3 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)) \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Gamma & A_1 \\ \Delta & A_2 \\ \hline \Gamma \cup \Delta & A_3 \supset (A_4 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)) \end{array}} \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Gamma & A_1 \\ \Delta & A_2 \\ & \vdots \\ \Xi & A_n \\ \hline \Gamma \cup \Delta \cup \ldots \cup \Xi & B \end{array}}$$

Beispiele abgeleitete Schlußregeln

$$\frac{\Gamma \quad A \vee (B \wedge C)}{\Gamma \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

$$\frac{\Gamma \quad \forall i {\sim} A}{\Gamma \quad {\sim}\exists i A}$$

$$\frac{\Gamma \quad A \supset B}{\Gamma \quad {\sim}B \supset {\sim}A}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \quad A \supset B \\ \Delta \quad {\sim}B\end{array}}{\Gamma, \Delta \quad {\sim}A}$$

$$\frac{\Gamma \quad {\sim}\exists i A}{\Gamma \quad \forall i {\sim} A}$$

$$\frac{\Gamma \quad \exists i (A \vee B)}{\Gamma \quad \forall i {\sim} A \supset {\sim}\forall i {\sim} B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \exists i (A \vee B) \\ \Delta \quad \forall i {\sim} A\end{array}}{\Gamma, \Delta \quad {\sim}\forall i {\sim} B}$$