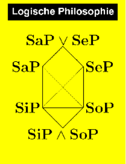
System des Natürlichen Schließens

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Dezember 2011



Ziel der Übung

Aufgabe: Sei Γ endlich. $\Gamma \models A$ ist eine Aussage über Modelle. Kann man von Γ aus direkt auf A kommen, dh. A aus Γ heraus **beweisen**?

Weg: Setze alle Formeln aus Γ als Prämissen. Finde einen Satz von Regeln, die als Beweisregeln akzeptiert werden können. (Zeige, daß – idealerweise – das und nur das bewiesen werden kann, was auch folgt!)

Achtung: Auf der Oberfläche hat das nichts mehr mit Wahrheit, Gültigkeit …zu tun.

Strukturregel

Ein **Beweis** $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ist eine endliche Folge von 4-Tupeln aus

einer Zeilennummer
einer Menge von Abhängigkeiten
einer Formel
einer Rechtfertigung der Formel

wobei die Formel selbst Annahmeformel, Hypothese aufgrund einer Regel, aus vorhergehenden Zeilen nach Regeln gewonnen oder Theorem ist. Der Beweis ist beendet, wenn B als Formel in einer Beweiszeile mit höchstens den Abhängigkeiten $\{A_1, \ldots, A_n\}$ erhalten worden ist.

Beispiel:

7. $\{1, 2\}$ $P(a) \wedge P(b)$ **E** $\wedge$

Einführung der Subjunktion

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Gamma \setminus i\}$	$A_i \supset A_j$	E $\supset$, i, j

1. Angenommen, die Welt hätte keinen Anfang in der Zeit.
2. …

n. Bis zum Jetzt-Zeitpunkt wären unendlich viele Zeitspannen durchlaufen.

n+1. Wenn die Welt keinen Anfang in der Zeit hätte, dann wären bis jetzt unendlich viele Augenblicke durchlaufen worden.

Beseitigung der Subjunktion

$$\begin{array}{lll} i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A_j \\ j. & \{\Delta\} & A_i \\ \hline k. & \{\Gamma, \Delta\} & A_j \qquad\qquad \mathrm{B} \supset,\ i, j \end{array}$$

1. Wenn Gott das Wesen ist, über welches hinaus nichts Vollkommeneres gedacht werden kann, so muß Gott existieren.
2. Gott ist das, worüber hinaus nichts Höheres gedacht werden kann.
3. Gott gibt es.

Einführung der Negation

$i.$	$\{i\}$	A_i	Prämisse/Hypothese
$j.$	$\{\Gamma\}$	A_j	
$k.$	$\{\Delta\}$	$\sim A_j$	
$l.$	$\{\Gamma, \Delta \backslash i\}$	$\sim A_i$	$\mathbf{E} \sim i, j, k$

1. Angenommen, es gäbe Gott.
2. Dann wäre er ganz gut.
3. Dann könnte er nicht für das Böse verantwortlich sein.
4. Dann wäre er allmächtig.
5. Dann müßte er (auch) für das Böse verantwortlich sein.
6. Es gibt Gott nicht.

Beseitigung der Negation

$$\begin{array}{llll} i. & \{\Gamma\} & \sim\sim A_i & \\ \hline j. & \{\Gamma\} & A_i & \mathbf{B} \sim i \end{array}$$

1. Die Welt ist nicht unerkennbar.
2. Sie ist erkennbar.

Einführung der Konjunktion

$i.$	$\{\Gamma\}$	A_i	
$j.$	$\{\Delta\}$	A_j	
$k.$	$\{\Gamma, \Delta\}$	$A_i \wedge A_j$	$\mathbf{E} \wedge i, j$

1. Gott ist allwissend.
2. Gott ist allmächtig.
3. Gott ist allwissend und allmächtig.

Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \wedge A_j}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \qquad \mathbf{B} \wedge i} \qquad \frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \wedge A_j}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_j \qquad \mathbf{B} \wedge i}$$

1. Die Kausalrelation ist transitiv und irreflexiv.
2. Sie ist irreflexiv.
3. Sie ist transitiv.

Einführung der Adjunktion

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_i}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i}$$

$$\frac{i. \quad \{\Gamma\} \quad A_j}{j. \quad \{\Gamma\} \quad A_i \vee A_j \quad \mathbf{E} \vee i}$$

1. Die Sekretärin soll den Brief abschicken.
   Alternativ:
2. Die Sekretärin soll den Brief verbrennen.
3. Die Sekretärin soll den Brief abschicken oder soll ihn verbrennen.

Beseitigung der Adjunktion

$$
\begin{array}{llll}
i. & \{\Gamma\} & A_i \supset A & \\
j. & \{\Delta\} & A_j \supset A & \\
k. & \{\Xi\} & A_i \vee A_j & \\
\hline
l. & \{\Gamma, \Delta, \Xi\} & A & \mathbf{B} \vee i, j, k
\end{array}
$$

1. Wenn es Gott gibt, kann man ihn nicht erkennen.
2. Wenn es Gott nicht gibt, kann man ihn nicht erkennen.
3. Es gibt Gott oder es gibt ihn nicht.
4. Man kann Gott nicht erkennen.

Einführung des Allquantors

$$\frac{k. \quad \{\Gamma\} \quad A}{l. \quad \{\Gamma\} \quad \forall iA \qquad \mathbf{E}\,\forall^{*}\ k}$$

Die Variable *i*, über die generalisiert wird, darf in keiner der Formeln, auf die $\{\Gamma\}$ verweist, frei vorkommen.

1. Menschen sind gleich.
2. Alle Menschen sind gleich.

Womit, wozu sind Menschen gleich?

Beseitigung des Allquantors

$$
\begin{array}{llll}
k. & \{\Gamma\} & \forall i A & \\
\hline
l. & \{\Gamma\} & A(i/j) & \mathbf{B}\forall\, k
\end{array}
$$

1. Der Krieg ist der Vater aller Dinge.
2. >Der Krieg ist der Vater des römischen Reiches.
2. Der Krieg ist der Vater der Dinge.

Einführung des Existenzquantors

$$\begin{array}{llll} k. & \{\Gamma\} & A(i/j) & \\ \hline l. & \{\Gamma\} & \exists i A(i) & \mathbf{E}\exists\ k \end{array}$$

1. Der Erstbeweger hat keine Ursache.
2. Es gibt etwas, das keine Ursache hat.

Beseitigung des Existenzquantors

$$
\begin{array}{rlll}
k. & \{\Gamma\} & \exists i A_1 & \\
l. & \{l\} & A_1(i/j) & \text{Hypothese} \\
m. & \{\Delta, l\} & A_2 & \\
\hline
n. & \{\Gamma, \Delta\} & A_2 & \mathbf{B}\ \exists^{**}\ k, l, m
\end{array}
$$

Mit dem Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile l angezeigt: j ist eine Individuenkonstante, die neu im Beweis ist.

Mit dem zweiten Sternchen wird eine Einschränkung in Zeile m angezeigt: j darf nicht in A_2 vorkommen.

1. Es gibt eine Ursache für alles.
2. Angenommen, Gott ist diese Ursache für alles.
3. Dann ist Gott auch Ursache seiner selbst.
4. Dann gibt es etwas, was Ursache seiner selbst ist.

Weitere Regeln ableiten

1.	$\{1\}$	$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$	Voraussetzung
2.	$\{1\}$	$A \supset B$	$\mathbf{B} \wedge 1$
3.	$\{1\}$	$B \supset A$	$\mathbf{B} \wedge 1$
4.	$\{4\}$	A	Hypothese
5.	$\{1,4\}$	B	$\mathbf{B} \supset 2,4$
6.	$\{6\}$	B	Hypothese
7.	$\{1,6\}$	A	$\mathbf{B} \supset 3,6$

$$A \equiv B \quad =_{dfn} \quad (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma & A \equiv B \\ \Delta & A\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma, \Delta & B\end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & A \equiv B \\ \Delta & B\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma, \Delta & A\end{array}}$$

$$\frac{\Gamma \quad A \equiv B}{\Gamma \quad A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \quad A \equiv B}{\Gamma \quad B \supset A}$$