Semantik – Schluß

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

November 2011

Die logische Folgebeziehung

Definition: Sei Γ eine beliebige Formelmenge und A eine prädikatenlogische Formel. Aus Γ folgt die Formel A genau dann logisch, wenn jedes Modell in dem alle Formeln aus Γ gültig sind, auch A gültig werden läßt.

$$\Gamma \models A \quad =_{\mathtt{dfn}} \quad \text{für alle } \mathfrak{M}:$$
$$\text{wenn für alle } B_n \in \Gamma \quad \mathfrak{M} \models B_n, \text{ dann } \mathfrak{M} \models A$$

Idee: die Wahrheit der Voraussetzungen vererbt sich auf die Schlußfolgerung

Folgebeziehung Beispiel

$$\{P(a) \vee P(b), P(a) \supset \sim Q(c), P(b) \supset \sim Q(c)\} \\ \models Q(c) \supset \sim Q(c) \qquad (1)$$

- Wir werden künftig die Mengenklammern um Γ weglassen.
- Um zu überprüfen, ob $\Gamma \models A$ gilt, nimmt man an es gäbe ein Modell (und eine Belegung), in dem alle Elemente aus Γ gelten aber A nicht. Führt die Annahme zu einem Widerspruch, gibt es kein solches Modell und alle gültigen Modelle für Γ sind auch Modelle für A (**indirekter Beweis**).

Immer noch Beispiel Folgebeziehung

$$P(a) \vee P(b), P(a) \supset {\sim}Q(c), P(b) \supset {\sim}Q(c) \models Q(c) \supset {\sim}Q(c)$$

1.	$\mathfrak{M} \models P(a) \vee P(b)$	Ann.
2.	$\mathfrak{M} \models P(a) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
3.	$\mathfrak{M} \models P(b) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
4.	$\mathfrak{M} \not\models Q(c) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
5.	$\mathfrak{M} \models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \models P(b)$	$1\vee$
6.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \not\models Q(c)$	$2 \supset \sim$
7.	$\mathfrak{M} \not\models P(b)$ oder $\mathfrak{M} \not\models Q(c)$	$3 \supset \sim$
8.	$\mathfrak{M} \models Q(c)$ und $\mathfrak{M} \models Q(c)$	$4 \supset \sim$
9.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$	6, 8
10.	$\mathfrak{M} \not\models P(b)$	7, 8
11.	$\mathfrak{M} \models P(b)$	5, 9
12.	$\mathfrak{I}(b) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{I}(b) \in \mathfrak{I}(P)$	10, 11PF

- Widerspruch, so ein Modell kann es nicht geben. Die Formel folgt tatsächlich.

Inkonsistenz und Äquivalenz

Inkonsistenz: Eine Menge Γ heißt inkonsistent, wenn es eine Formel A so gibt, daß $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models \sim A$. Eine Formelmenge heißt konsistent, wenn sie nicht inkonsistent ist.

Äquivalenz: Zwei Formeln heißen genau dann äquivalent, wenn sie (die entsprechenden Mengen) logisch auseinander folgen:

$$A \approx B \quad =_{dfn} \quad A \models B \text{ und } B \models A$$

Inkonsistenz Beispiel

- Inkonsistenz wird nachgewiesen, indem man (indirekt) annimmt, es gäbe ein Model (und eine Belegung) in dem alle Formeln der Menge gelten. Dies wird zum Widerspruch zu führen versucht.
- Ergibt sich ein Widerspruch, ist die Menge inkonsistent. Anderenfalls ist sie **erfüllbar**.

$$\{P(x) \wedge \sim P(x)\} \text{ ist inkonsistent.} \tag{2}$$

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models P(x) \wedge \sim P(x)$	Ann.
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models P(x)$	$1 \wedge \sim$
3.	$\mathfrak{B}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{B}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$	2PF

- Solch Modell und Belegung kann es nicht geben, daher ist die Annahme absurd und die Formelmenge inkonsistent.

Beispiel Äquivalenz

$$\forall x \exists y (P(x) \supset Q(y)) \approx \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$$

Behauptung in der Metasprache!

Zwei Teilbehauptungen, die bewiesen werden müssen:

$$\forall x \exists y (P(x) \supset Q(y)) \models \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$$
$$\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))$$

und also

für alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$: wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))$
dann $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$

für alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$: wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$
dann $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))$

Beispiel Äquivalenz Fortsetzung 1

1. für irgendein $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} : \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$ — Ann.
2. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models \exists y (P(x) \supset Q(y))$ — $1\forall$
3. für alle $\mathfrak{V}_x$ gibt es $\mathfrak{V}_{xy} : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy} \models P(x) \supset Q(y)$ — $2\exists$
4. für alle $\mathfrak{V}_x$ gibt es $\mathfrak{V}_{xy} : \mathfrak{V}_{xy}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_{xy}(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ — $3 \supset$ Pred
5. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x)$ — $1 \supset$
6. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ — $5\forall$Pred
7. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists y Q(y)$ — $1 \supset$
8. für alle $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{V}_y(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ — $7\exists$Pred

Beispiel Äquivalenz Fortsetzung 2

4. für alle $\mathfrak{B}_x$ gibt es $\mathfrak{B}_{xy} : \mathfrak{B}_{xy}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$
   oder $\mathfrak{B}_{xy}(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ $\qquad$ $3 \supset$ Pred
6. für alle $\mathfrak{B}_x : \mathfrak{B}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ $\qquad$ $5\forall$Pred
8. für alle $\mathfrak{B}_y : \mathfrak{B}_y(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ $\qquad$ $7\exists$Pred

Wieso ist das ein Widerspruch?

Die Werte $\mathfrak{B}_{xy}(x)$ und $\mathfrak{B}_x(x)$ unterscheiden sich nicht, (die Belegungen unterscheiden sich höchstens im Wert für y), also folgt aus 4 und 6, daß $\mathfrak{B}_{xy}(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ für ein passendes $\mathfrak{B}_{xy}$. Das gibt es aber nicht, weil $\mathfrak{I}(Q)$ wegen 8 leer ist.

Beispiel Äquivalenz Fortsetzung 3

1. für irgendein $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} : \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x) \supset \exists y Q(y)$,
   $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))$ — Ann.
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists y Q(y)$ — $1 \supset$
3. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$
   oder für ein $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{V}_y(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ — $2\forall\exists$Pred
4. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models \exists y (P(x) \supset Q(y))$ — $1\forall$
5. für ein $\mathfrak{V}_x$ gilt für alle $\mathfrak{V}_{xy} : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy} \not\models P(x) \supset Q(y)$ — $4\exists$
6. für ein $\mathfrak{V}_x$ gilt für alle $\mathfrak{V}_{xy}$:
   $\mathfrak{V}_{xy}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_{xy}(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ — $5 \supset$ Pred

Beispiel Äquivalenz Fortsetzung 4

3. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$
   oder für ein $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{V}_y(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ 2∀∃Pred

6. für ein $\mathfrak{V}_x$ gilt für alle $\mathfrak{V}_{xy}$:
   $\mathfrak{V}_{xy}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_{xy}(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ 5 $\supset$ Pred

Wieso ist das **kein** Widerspruch?

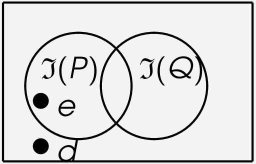
Wenn $\mathfrak{I}(Q) = \emptyset$, $\mathfrak{I}(P) = \{d\}$ und $\overline{\mathfrak{I}(Q)} \cap \overline{\mathfrak{I}(P)} = \{e\}$, dann gilt 3 falls $\mathfrak{V}_x(x) = e$; und 6 gilt wegen $\mathfrak{V}_{xy}(x) = d$ und $\mathfrak{V}^1_{xy}(y) = d$ $(\notin \mathfrak{I}(Q))$ und $\mathfrak{V}^2_{xy}(y) = e$ $(\notin \mathfrak{I}(Q))$.

Beispiel Äquivalenz Fortsetzung 5

$$\forall x \exists y (P(x) \supset Q(y)) \not\approx \forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \qquad \text{weil} \qquad (3)$$

$$\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \not\models \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y)) \qquad (4)$$

Gegenmodell: Eine Welt aus zwei Gegenständen mit einer leeren Eigenschaft, einer Einser-Eigenschaft:



Die Welt besteht aus Anna und Caro. Anna ist witzig, Caro nicht. Keine ist ein Mann.

Wenn alle witzig sind, dann gibt es einen Mann (denn es sind nicht alle witzig). Es ist nicht so, daß es für alle jemanden so gibt, daß wenn erstere witzig ist, letztere(r) ein Mann ist (denn obwohl Anna witzig ist, ist niemand männlich).

Ersetzbarkeitstheorem

Satz Wenn $A \approx B$, dann $C \approx C[A/B]$.
$C[A/B]$ ist das Ergebnis der Ersetzung der Teilformel A in C durch B.

Beweis Induktion über den Formelaufbau (über die Anzahl der logischen Operatoren/Quantoren in C.)

Folge Wenn $\models C$ und $A \approx B$, dann $\models C[A/B]$

Beispiel $\models P(a) \supset (Q(b) \supset P(a))$ und $A \supset B \approx {\sim}A \vee B$,
also $\models P(a) \supset ({\sim}Q(b) \vee P(a))$,
also $\models {\sim}P(a) \vee ({\sim}Q(b) \vee P(a))$

Folgebeziehung und Allgemeingültigkeit

Satz: Sei $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine endliche Formelmenge und B eine beliebige Formel.

$\Gamma \models B$ genau dann, wenn $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

Beweis:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Angenommen $\Gamma \models B$, dann gibt es keine $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$ so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models A_1, \ldots, \mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models A_n$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models B$. Dann gilt für alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$: $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models A_1$ oder ... oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models A_n$; oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models B$. Das aber heißt: $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Angenommen $\Gamma \not\models B$, dann gibt es ein $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$ so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models A_1, \ldots, \mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models A_n$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models B$. Dann gilt für dieses $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$ auch $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ und wegen $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models B$ haben wir nicht $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

Monotonie

Satz: Wenn $\Gamma \models A$, so $\Gamma \cup \Delta \models A$.

Beweis: Angenommen, $\Gamma \cup \Delta \not\models A$. Dann gibt es ein $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$ in dem alle Aussagen aus $\Gamma \cup \Delta$ gültig sind, A aber nicht. Alle Aussagen aus Γ sind in $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}$ aber ebenfalls gültig und daher gilt $\Gamma \not\models A$.

Beispiel: Wenn aus einer (naturwissenschaftlichen) Theorie Γ eine Aussage logisch folgt, dann wird diese Aussage auch aus jeder Erweiterung der Theorie folgen.

Subjunktionen und Konjunktionen

$$A \supset (B \supset C) \approx A \wedge B \supset C$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

1. $\mathfrak{M} \not\models A \wedge B \supset C$
2. $\mathfrak{M} \models A \wedge B, \mathfrak{M} \not\models C$ sub
3. $\mathfrak{M} \models A, \mathfrak{M} \models B, \mathfrak{M} \not\models C$ kon
4. $\mathfrak{M} \models A, \mathfrak{M} \not\models B \supset C$ sub
5. $\mathfrak{M} \not\models A \supset (B \supset C)$ sub

$\boxed{\Longleftarrow}$

1. $\mathfrak{M} \not\models A \supset (B \supset C)$
2. $\mathfrak{M} \models A, \mathfrak{M} \models B, \mathfrak{M} \not\models C$ sub
3. $\mathfrak{M} \models A \wedge B, \mathfrak{M} \not\models C$ kon
4. $\mathfrak{M} \not\models A \wedge B \supset C$ sub

Folge: Anstelle von $\models A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots(A_n \supset B)\ldots))$ zeige $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Kontradiktionen, und warum wir sie nicht mögen

Kontradiktion heißt eine unerfüllbare (in keinem Modell unter keiner Belegung gültige) Formel.

$$\perp A \quad =_{dfn} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models A \text{ für alle } \mathfrak{M}, \mathfrak{v}$$

1. $\perp \models B$ für beliebige B.
   Beweis: Es ist unmöglich, daß $\mathfrak{M} \models \perp$ und $\mathfrak{M} \not\models B$.
2. Wenn $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models \sim A$, dann sind die Formeln aus Γ nicht gemeinsam erfüllbar.
   Beweis: Wenn es ein $\mathfrak{M}$ so gäbe, daß $\mathfrak{M} \models B_i$ für alle $B_i \in \Gamma$, würde in diesem $\mathfrak{M}$ auch gelten: $\mathfrak{M} \models A$ und $\mathfrak{M} \models \sim A$.
   Definition: $\perp \Gamma \quad =_{dfn}$ die Formeln aus Γ sind nicht gemeinsam erfüllbar.
3. $\perp \{A_1, \ldots, A_n, \sim B\}$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Entscheidbarkeit

Entscheidbar heißt eine (Formel-) Menge, wenn man mit einer effektiven Methode für jedes Element (Formel) feststellen kann, ob es zur Menge gehört.

Beispiel: Die Menge der Anwesenden dieser Veranstaltung ist entscheidbar. Die Menge der Zuhörenden ist nicht entscheidbar.

Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit

- Gibt es ein rein formelmanipulatorisches Verfahren, mit dem man für jede prädikatenlogische Formel in einer endlichen Anzahl von Schritten zweifelsfrei feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht? Nein
- Wenn man weiß, daß A eine prädikatenlogische Tautologie ist – kann man das in endlich vielen effektiven Schritten nachweisen? Ja (Allgemeingültige Formeln sind aufzählbar.)
- Warum ist Allgemeingültigkeit unentscheidbar? Schwierige Frage Formaler Beweis von Gödel/Church, inhaltlich etwa: Bei $\not\models \forall$ und $\models \exists$ muß man „ein Beispiel auswählen" – da gibt es aber viele.
- Gibt es entscheidbare prädikatenlogische Formelmengen? Ja, bspw. die aussagenlogischen Tautologien, einstellige Fragment und viele andere.