Allgemeingültigkeit, Folgebeziehung

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

November 2011

Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich IK $\cup$ IK und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Variablenbelegungen

$\mathfrak{V}_\mathbf{i}$**-Belegung** (eine i-Variante der Ausgangsbelegung $\mathfrak{V}$) in einem Modell heißt eine Belegung, die sich von der Belegung $\mathfrak{V}$ höchstens im Wert für die Variable i unterscheidet.

($\mathfrak{V}_i(j) = \mathfrak{V}(j)$ für alle verschiedenen Variablen i und j.)

Wahrheitsbedingungen (Tarski)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n)$,

$$\mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$$

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models {\sim}A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \vee B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$;
oder aber $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models B$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall iA$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$ für alle $\mathfrak{V}_i$.

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$ für irgendein $\mathfrak{V}_i$.

Wahrheit

erfüllbar im Modell ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung gibt, unter der sie im Modell erfüllt (wahr) ist

wahr im Modell ist eine Formel genau dann, wenn sie unter jeder Belegung im Modell erfüllt (wahr) ist

erfüllbar ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung und ein Modell so gibt, daß sie im Modell unter der Belegung erfüllt ist

allgemeingültig (logisch wahr, tautologisch) ist eine Formel, wenn sie wahr in jedem Modell unter jeder Belegung ist

>(unerfüllbar) (logisch falsch, kontradiktorisch) ist eine Formel, die unter keiner Belegung in keinem Modell erfüllt ist

Ein Beispiel

Modell $\mathfrak{M}^* = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$, mit $\mathfrak{D} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (die Menge der natürlichen Zahlen) und $\mathfrak{I}$ derart, daß:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{I}(a) & = & 0 \\
\mathfrak{I}(a_1) & = & 1 \\
\mathfrak{I}(a_2) & = & 2 \\
\vdots & = & \vdots \\
\mathfrak{I}(a_n) & = & n \\
\vdots & = & \vdots \\
\mathfrak{I}(P) & = & = \\
\mathfrak{I}(Q) & = & < \\
\mathfrak{I}(R) & = & \text{ohne Rest durch \_teilbar}
\end{array}
$$

Beispielaussagen:

- $\sim R(a_{17}, a_4)$
- $Q(x, a_{12})$
- $\forall x(P(x, a) \vee Q(a, x))$

Gültig? Erfüllbar?

- $\sim R(a_{17}, a_4)$ – wahr (erfüllt, gültig) im Modell

  $$\begin{aligned} \mathfrak{M}^* \models \sim R(a_{17}, a_4) &\text{ gdw. } \mathfrak{M}^* \not\models R(a_{17}, a_4) \\ &\text{ gdw. } \langle \mathfrak{I}^*(a_{17}), \mathfrak{I}^*(a_4) \rangle \notin \mathfrak{I}^*(R) \\ &\text{ gdw. } 17 \text{ ist nicht ohne Rest durch 4 teilbar} \end{aligned}$$

- $Q(x, a_{12})$ – erfüllbar im Modell

  $$\begin{aligned} \mathfrak{M}^*\mathfrak{V} \models Q(x, a_{12}) &\text{ gdw. } \langle \mathfrak{V}(x), \mathfrak{I}^*(a_{12}) \rangle \in \mathfrak{I}^*(Q) \\ &\text{ gdw. } \mathfrak{V}(x) < 12 \end{aligned}$$

- $\forall x(P(x, a) \vee Q(a, x))$ – wahr (erfüllt, gültig) im Modell

  $$\begin{aligned} &\mathfrak{M}^*\mathfrak{V} \models \forall x(P(x, a) \vee Q(a, x)) && \text{gdw.} \\ &\text{für alle } \mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}^*\mathfrak{V}_x \models P(x, a) \vee Q(a, x) && \text{gdw.} \\ &\text{für alle } \mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}^*\mathfrak{V}_x \models P(x, a) \text{ oder } \mathfrak{M}^*\mathfrak{V}_x \models Q(a, x) && \text{gdw.} \\ &\text{für alle } \mathfrak{V}_x : \langle \mathfrak{V}_x(x), \mathfrak{I}^*(a) \rangle \in \mathfrak{I}^*(P) \text{ oder} && \\ &\qquad\qquad \langle \mathfrak{I}^*(a), \mathfrak{V}_x(x) \rangle \in \mathfrak{I}^*(Q) && \text{gdw.} \\ &\text{für alle } \mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) = 0 \text{ oder } 0 < \mathfrak{V}_x(x) && \end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit

Definition: Die Formel A ist genau dann allgemeingültig, wenn sie gültig in jedem Modell unter jeder Belegung ist.

$$\models A \quad =_{dfn} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \text{ für alle } \mathfrak{M} \text{ und } \mathfrak{V}$$

Problem: Wie zeigt man, daß etwas „für alle" gilt?

- Durchmustern aller Fälle.
- Ableiten aus einem allgemeineren Gesetz.
- Indirekt beweisen.

Indirekter Beweis:

Es ist zu zeigen, daß eine Behauptung A gilt.
Nimm an, A gelte nicht. (**Zusätzliche Prämisse!**)
Zeige, daß nun ein Widerspruch folgt. Damit ist die zusätzliche Prämisse absurd.
Also kann die zusätzliche Prämisse nicht wahr sein, muß die Annahme, daß A nicht gilt, falsch sein. Also muß A wahr sein.

Allgemeingültigkeit – Beispiel 1

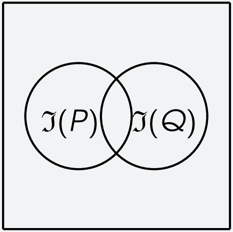
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \qquad (1)$$

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ Ann.
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$ und
   $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ $1 \supset$
3. für alle $\mathfrak{B}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{B}_x \models P(x) \vee Q(x)$ und $2\forall$
   $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models \forall x P(x)$ **und** $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models \exists x Q(x)$ $2\vee$
4. für alle $\mathfrak{B}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{B}_x \models P(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}_x \models Q(x)$ $3.\vee$
   und für ein $\mathfrak{B}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{B}_x \not\models P(x)$ und $(\star)$
   für alle $\mathfrak{B}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{B}_x \not\models Q(x)$ $3\forall, \exists$
5. sei $\mathfrak{B}'$ die Belegung aus $(\star)$:
   $\mathfrak{B}'(x) \in \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{B}'(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ 4PF
   und $\mathfrak{B}'(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{B}'(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$ 4PF

Immer noch Beispiel 1

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \supset \forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$$

5. sei $\mathfrak{B}'$ die Belegung aus $(\star)$:
   $\mathfrak{B}'(x) \in \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{B}'(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ (1)
   und $\mathfrak{B}'(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{B}'(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$ (2)



- Es gibt kein widerlegendes Modell, die Formel gilt für alle Modelle und Belegungen!

Allgemeingültigkeit – Beispiel 2

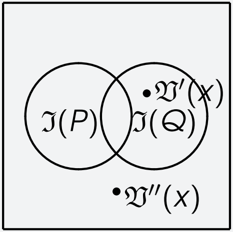
$$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x)) \qquad (2)$$

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$ Ann.
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ und
   $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x))$ $1 \supset$
3. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models P(x)$ oder $2 \vee \forall$
   für einige $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models Q(x)$ $(\star)2 \vee \exists$
   und für einige $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x) \vee Q(x)$ $2\forall$
4. für einige $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models Q(x)$ $(\star\star)3\vee$
5. sei $\mathfrak{V}'$ die Belegung aus $(\star), \mathfrak{V}''$ die aus $(\star\star)$:
6. $\mathfrak{V}'(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ und $\mathfrak{V}''(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}''(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$

Immer noch Beispiel 2

$$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \supset \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

6. $\mathfrak{V}'(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ und $\mathfrak{V}''(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}''(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$



- Es gibt ein widerlegendes Modell!

Die logische Folgebeziehung

Definition: Sei Γ eine beliebige Formelmenge und A eine prädikatenlogische Formel. Aus Γ folgt die Formel A genau dann logisch, wenn jedes Modell in dem alle Formeln aus Γ gültig sind, auch A gültig werden läßt.

$$\Gamma \models A \quad =_{dfn} \quad \text{für alle } \mathfrak{M}:$$
$$\text{wenn für alle } B_n \in \Gamma \quad \mathfrak{M} \models B_n, \text{ dann } \mathfrak{M} \models A$$

Idee: die Wahrheit der Voraussetzungen vererbt sich auf die Schlußfolgerung

Inkonsistenz: Eine Menge Γ heißt inkonsistent, wenn es eine Formel A so gibt, daß $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models \sim A$. Eine Formelmenge heißt konsistent, wenn sie nicht inkonsistent ist.

Folgebeziehung Beispiel

$$\{P(a) \vee P(b), P(a) \supset {\sim}Q(c), P(b) \supset {\sim}Q(c)\} \models Q(c) \supset {\sim}Q(c) \qquad (3)$$

- Wir werden künftig die Mengenklammern um Γ weglassen.
- Um zu überprüfen, ob $\Gamma \models A$ gilt, nimmt man an es gäbe ein Modell (und eine Belegung), in dem alle Elemente aus Γ gelten aber A nicht. Führt die Annahme zu einem Widerspruch, gibt es kein solches Modell und alle gültigen Modelle für Γ sind auch Modelle für A (**indirekter Beweis**).

Immer noch Beispiel Folgebeziehung

$$P(a) \vee P(b), P(a) \supset {\sim}Q(c), P(b) \supset {\sim}Q(c) \models Q(c) \supset {\sim}Q(c)$$

1.	$\mathfrak{M} \models P(a) \vee P(b)$	Ann.
2.	$\mathfrak{M} \models P(a) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
3.	$\mathfrak{M} \models P(b) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
4.	$\mathfrak{M} \not\models Q(c) \supset {\sim}Q(c)$	Ann.
5.	$\mathfrak{M} \models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \models P(b)$	$1\vee$
6.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \not\models Q(c)$	$2 \supset \sim$
7.	$\mathfrak{M} \not\models P(b)$ oder $\mathfrak{M} \not\models Q(c)$	$3 \supset \sim$
8.	$\mathfrak{M} \models Q(c)$ und $\mathfrak{M} \models Q(c)$	$4 \supset \sim$
9.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$	6, 8
10.	$\mathfrak{M} \not\models P(b)$	7, 8
11.	$\mathfrak{M} \models P(b)$	5, 9
12.	$\mathfrak{I}(b) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{I}(b) \in \mathfrak{I}(P)$	10, 11PF

- Widerspruch, so ein Modell kann es nicht geben. Die Formel folgt tatsächlich.

Inkonsistenz Beispiel

- Inkonsistenz wird nachgewiesen, indem man (indirekt) annimmt, es gäbe ein Model (und eine Belegung) in dem alle Formeln der Menge gelten. Dies wird zum Widerspruch zu führen versucht.
- Ergibt sich ein Widerspruch, ist die Menge inkonsistent. Anderenfalls ist sie **erfüllbar**.

$$\{P(x) \wedge \sim P(x)\} \text{ ist inkonsistent.} \tag{4}$$

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models P(x) \wedge \sim P(x)$	Ann.
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models P(x)$	$1 \wedge \sim$
3.	$\mathfrak{B}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{B}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$	2PF

- Solch Modell und Belegung kann es nicht geben, daher ist die Annahme absurd und die Formelmenge inkonsistent.