Modelle, Wahrheit

Dr. Uwe Scheffler

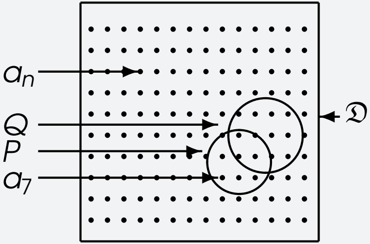
(Technische Universität Dresden)

November 2011

Logische Philosophie

Wahrheit

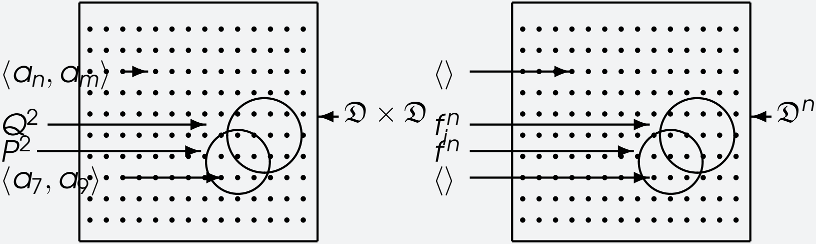
Das Wahre hat der, der das Getrennte als getrennt und das Verbundene als verbunden denkt; das Falsche ergreift, wer eben dieses Verhältnis anders auffaßt als es in Wirklichkeit ist.
(Aristoteles, Metaphysik)



$P(a_7)$ ist wahr in diesem $\mathfrak{D}$ bei dieser Verteilung der Pfeile, weil der a_7-Punkt tatsächlich im P-Kreis liegt: $\mathfrak{I}(a_7) \in \mathfrak{I}(P)$.

$Q(a_n)$ ist nicht wahr in diesem $\mathfrak{D}$ bei dieser Verteilung der Pfeile, weil der a_n-Punkt tatsächlich nicht im Q-Kreis liegt: $\mathfrak{I}(a_n) \notin \mathfrak{I}(Q)$.

Relationale Aussagen



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich IK $\cup$ IK und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Beispiel

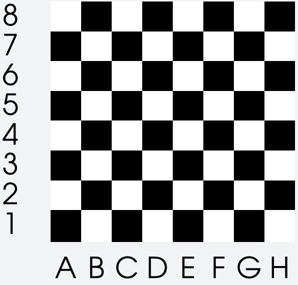
Eine konkrete Sprache:

IK: A1 – H8
PK: weiß, schwarz, ist neben, liegt horizontal zwischen, liegt vertikal zwischen, liegt diagonal zwischen

Prädikatenlogisch:

$a_1, a_2, \ldots, a_{64}, \ldots$
$P^1_1, P^1_2, Q^2_1, R^3_1, R^3_2, R^3_3, \ldots$

Ein konkretes Modell:



$\mathfrak{D} =$ die Menge der Felder.

$\mathfrak{I}$(A2) = das Feld erste Spalte, zweite Reihe

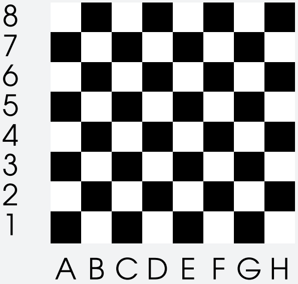
$\mathfrak{I}$(weiß) = die Menge der weißen Felder,
$\mathfrak{I}$(ist neben) = die Menge der Paare von Feldern, die nebeneinander liegen

Formalisierung

Formalisieren:

A2, B3, C4	$\rightsquigarrow$	a_9, a_{18}, a_{27}
weiß	$\rightsquigarrow$	P_1
schwarz	$\rightsquigarrow$	P_2
neben	$\rightsquigarrow$	Q
h-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_1
v-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_2
d-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_3

Ein konkretes Modell:



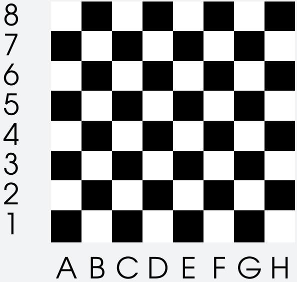
A2 ist weiß.	$P_1(a_9)$
B3 ist nicht schwarz.	$\sim P_2(a_{18})$
B3 ist nicht d-zwischen A2 und C4.	$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27})$
B3 hat Nachbarn.	$\exists x Q(x, a_{18})$
Alle Felder sind weiß.	$\forall x P_1(x)$

Wahrheitsbewertung

Interpretieren:

a_9, a_{18}, a_{27}	$\mathfrak{I}$:	A2, B3, C4
P_1	$\mathfrak{I}$:	Menge …
P_2	$\mathfrak{I}$:	Menge …
Q	$\mathfrak{I}$:	Paarmenge …
R_3	$\mathfrak{I}$:	Tripelmenge …

Ein konkretes Modell:



$$P_1(a_9) \quad \stackrel{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_9) \in \mathfrak{I}(P_1)$$

$$\sim P_2(a_{18}) \quad \stackrel{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_{18}) \notin \mathfrak{I}(P_2)$$

$$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27}) \stackrel{t}{\Leftrightarrow} \langle \mathfrak{I}(a_{18}), \mathfrak{I}(a_9), \mathfrak{I}(a_{27}) \rangle \notin \mathfrak{I}(R_3)$$

$$\exists x Q(x, a_{18}) \quad \stackrel{t}{\Leftrightarrow} \text{für einen Wert } \mathfrak{V}(x) : \langle \mathfrak{V}(x), \mathfrak{I}(a_{18}) \rangle \in \mathfrak{I}(Q)$$

$$\forall x P_1(x) \quad \stackrel{t}{\Leftrightarrow} \text{für alle Werte } \mathfrak{V}(x) : \mathfrak{V}(x) \in \mathfrak{I}(P_1)$$

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Das Problem: Wie werden die quantifizierten Formeln und die mit freien Variablen bewertet?

- $\forall x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn jedes einzelne Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $\exists x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn irgendein Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $P(x)$ ist wahr im Modell wenn x irgendein Wert aus $\mathfrak{D}$ gegeben wurde und der in $\mathfrak{I}(P)$ ist.

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Die Lösung: Betrachte Funktionen, die den Variablen Werte aus $\mathfrak{D}$ zuschreiben: Variablenbelegungen $\mathfrak{V}$.

- Wenn alle Belegungen, die verschiedene Werte für x liefern, Werte aus $\mathfrak{I}(P)$ liefern, ist die Allaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- Wenn eine der Belegungen, die verschiedene Werte für x liefert, einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ liefert, ist die Existenzaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- Wenn die aktuelle Belegung einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ für x liefert, ist die offene Aussage gültig im Modell (unter der Belegung).

Variablenbelegungen

Variablen	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}^*$	$\mathfrak{B}^{**}$	$\mathfrak{B}_{x_2}$	$\mathfrak{B}_{x_n}$
x_1	A3	A1	A1	A3	A3
x_2	A5	A1	A5	A4	A5
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert
x_n	A5	A1	H6	A5	A3
x_{n+1}	C4	A1	H6	C4	C4
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert

$\mathfrak{B}_\mathbf{i}$-Belegung in einem Modell heißt eine Belegung, die sich von der Belegung $\mathfrak{B}$ höchstens im Wert für die Variable *i* unterscheidet.

($\mathfrak{B}_i(j) = \mathfrak{B}(j)$ für alle verschiedenen Variablen *i* und *j*.)

Modelle für die Prädikatenlogik

Sei $\mathfrak{D}$ eine nichtleere Menge, $\mathfrak{I}(i) \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}(f^n) \subset \mathfrak{D}^n$ und $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$.

Wir definieren $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$:
A ist wahr (erfüllt) in einem Modell unter einer Belegung

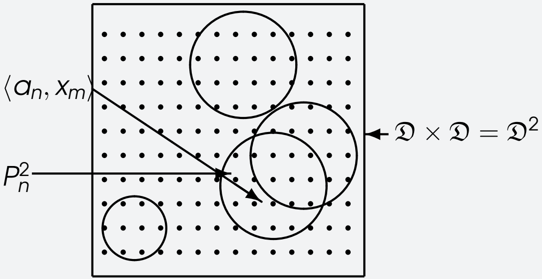
Schema:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ genau dann, wenn
(*eine Wahrheitsbedingung in Abhängigkeit von der Form von A*)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ heißt: es ist nicht so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$

Die Prädikatformeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n)$,

wobei $\mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$



$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models P^2_n(a_n, x_m)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}(a_n), \mathfrak{V}(x_m) \rangle \in \mathfrak{I}(P^2_n)$

„Anna mag Bodo“ ist genau dann erfüllt (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn die, die mit „Anna“ bezeichnet wird, und der, der mit „Bodo“ bezeichnet wird, ein Paar sind, das in der mit „mögen“ bezeichneten Menge ist.

Die Negationen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$.

Sei $\mathfrak{w} =$ - gültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$,
und $\mathfrak{f} =$ - ungültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$.

A	$\sim A$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}$$

„Anna mag Bodo nicht“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo“ dort ungültig ist.

Die Konjunktionen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \wedge B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}$$

„Anna mag Bodo und sie mag Chris" ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo" und „Anna mag Chris" auch dort gültig sind.

Die Adjunktionen (Disjunktionen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B$ genau dann,
wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \vee B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B}$$

„Anna mag Bodo oder sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Subjunktionen (Implikationen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B$ genau dann,
wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

A	B	$A \supset B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B}$$

„Wenn Anna Bodo mag, dann mag sie auch Chris" ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo nicht" oder aber „Anna mag Chris" auch dort gültig sind.

Die Bisubjunktionen (Implikationen in beiden Richtungen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B$ genau dann, wenn
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$, oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models B$.

A	B	$A \equiv B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B}$$

„Wenn Anna Bodo genau dann mag, wenn sie auch Chris mag“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo und auch Chris“ oder aber „Anna mag Bodo nicht und auch Chris nicht“ auch dort gültig sind.

Die Allaussagen (generelle Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A$ genau dann,
wenn für alle i-Varianten $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Alles fließt …

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \text{ für beliebige } \mathfrak{M}, \mathfrak{V}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}$$

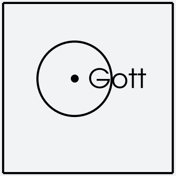
„Anna mag alle“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag JEDEN“ für eine beliebige Auswahl von JEDER auch dort gültig ist.

Die Existenzaussagen (partikuläre Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists i A$ genau dann, wenn
für mindestens eine i-Variante $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Es gibt einen Gott

...



$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A(j) \quad j - \text{IK}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists i A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists i A}$$

„Anna mag jemanden“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag EINEN“ für wenigstens eine Auswahl von EINER auch dort gültig ist.

Wahrheitsbedingungen (Tarski)

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models f^n(i_1,\ldots,i_n) & \text{genau dann, wenn } \langle \mathfrak{I}^*(i_1),\ldots,\mathfrak{I}^*(i_n)\rangle \in \mathfrak{I}(f^n), \\
\qquad \mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases} & \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models \sim A & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \not\models A. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \wedge B & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \text{ und } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models B. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \vee B & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \text{ oder } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models B. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \supset B & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \not\models A \text{ oder } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models B. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \equiv B & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models A \text{ und } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \models B; \\
 & \qquad \text{oder aber} \qquad \mathfrak{M},\mathfrak{V} \not\models A \text{ und } \mathfrak{M},\mathfrak{V} \not\models B. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models \forall iA & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V}_i \models A \text{ für alle } \mathfrak{V}_i. \\
\mathfrak{M},\mathfrak{V} \models \exists iA & \text{genau dann, wenn } \mathfrak{M},\mathfrak{V}_i \models A \text{ für irgendein } \mathfrak{V}_i.
\end{array}
$$

Wahrheit

erfüllbar im Modell ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung gibt, unter der sie im Modell erfüllt (wahr) ist

wahr im Modell ist eine Formel genau dann, wenn sie unter jeder Belegung im Modell erfüllt (wahr) ist

erfüllbar ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung und ein Modell so gibt, daß sie im Modell unter der Belegung erfüllt ist

allgemeingültig (logisch wahr, tautologisch) ist eine Formel, wenn sie wahr in jedem Modell unter jeder Belegung ist

unerfüllbar (logisch falsch, kontradiktorisch) ist eine Formel,
die unter keiner Belegung in keinem Modell erfüllt ist