Die Sprache der Prädikatenlogik, Überlegungen zu Modellen

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

November 2011

Die Formeldefinition der Prädikatenlogik

1. Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, und $i_1, \ldots, i_n$ sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).
2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (plF)**.
3. Wenn A plF ist, ist $\sim A$ plF.
4. Wenn A und B plF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ plF.
5. Wenn A eine plF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ plF.
6. Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.

Formalisieren und Interpretieren

Ausgangssatz: Es bewegt sich, aber es bewegt keinen Kater.

Umdeutung: Es gibt etwas, was sich selbst bewegt und falls es etwas bewegt, dann ist es kein Kater.

Nächste Umdeutung: Es gibt etwas, was sich selbst bewegt, und für alles gilt: wird es von ersterem bewegt, so ist es kein Kater.

Material:

- zweistelliges . . . BEWEGT . . . , einstelliges . . . KATER
- etwas und etwas anderes: zwei Individuenvariablen
- es gibt, für alle, und, wenn-dann, nicht

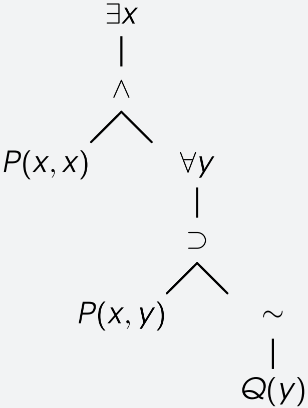
Es bewegt sich, aber es bewegt keinen Kater

Schlechtes Deutsch, gute Struktur: Es gibt etwas, was sich selbst bewegt, und für alles gilt: wird es von ersterem bewegt, so ist es kein Kater.

Übergang zu Formeln: ES GIBT ETWAS (Dieses etwas bewegt sich selbst. UND FÜR ALLES GILT: (WENN dieses jenes bewegt, ist jenes KEIN Kater.))

Formel: $\exists x(P(x, x) \wedge \forall y(P(x, y) \supset \sim Q(y)))$

$\exists x(P(x,x) \wedge \forall y(P(x,y) \supset \sim Q(y)))$



- Jemand sieht sich und nichts aus England.
- Etwas hat die eigene Farbe und ist dabei nicht schwarz.

Die logische Form von Sätzen

logische Form Zwei Sätze haben die gleiche logische Form, wenn sie durch folgendes Verfahren ineinander übersetzt werden können: Namen werden gegen Namen, *n*-stellige Prädikate gegen *n*-stellige Prädikate ersetzt.

logische Wahrheit Sätze sind logisch wahr, wenn sie selbst und alles Sätze mit der gleichen logischen Form wahr sind.

- Anna ist klüger als Bodo oder Anna ist nicht klüger als Bodo.
- Nettsein ist wichtiger als Wichtigsein oder Nettsein ist nicht wichtiger als Wichtigsein.
- 7 ist durch 3 teilbar oder 7 ist nicht durch 3 teilbar.

$\vdots$

Quantoren und Variablen

Wirkungsbereich eines Quantors $\forall i$ oder $\exists i$ in einer Formel $\forall iA$ beziehungsweise $\exists iA$ ist die Formel A.

Gebunden ist das Vorkommen einer Variablen unmittelbar hinter dem Quantorenzeichen und im Wirkungsbereich des entsprechenden Quantors. Ansonsten ist es **frei**.

$$\forall x \exists y(R(x, y, z) \supset \exists z(Q(z) \land \sim\forall y R(y, z, x)))$$

$$\boxed{\forall x}\,\underline{\exists y(R(\boxed{x}, y, z) \supset \exists z(Q(z) \land \sim\forall y R(y, z, \boxed{x})))}$$

$$\forall x\,\boxed{\exists y}\,\underline{(R(x, \boxed{y}, z) \supset \exists z(Q(z) \land \sim\forall \boxed{y}\, R(\boxed{y}, z, x)))}$$

$$\forall x \exists y(R(x, y, z) \supset \boxed{\exists z}\,\underline{(Q(\boxed{z}) \land \sim\forall y R(y, \boxed{z}, x))})$$

$$\forall x \exists y(R(x, y, z) \supset \exists z(Q(z) \land \sim\boxed{\forall y}\,\underline{R(\boxed{y}, z, x)}))$$

frei: $\forall x \exists y(R(x, y, \boxed{z}) \supset \exists z(Q(z) \land \sim\forall y R(y, z, x)))$

Vereinbarung über Klammersetzung

Ziel: Die Klammersetzung so vereinfachen (Klammern weglassen), daß die ursprüngliche Form eindeutig wiederhergestellt werden kann.

1. Außenklammern können weggelassen werden.

$(((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b))$ wird zu:
$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$1.^{-}$ Fehlende Außenklammern müssen restauriert werden.

Fortsetzung Klammernsetzung

2. Klammern um linke benachbarte gleiche Operatoren können weggelassen werden.

$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$2.^{-}$ Linke Klammern um benachbarte gleiche Operatoren müssen restauriert werden.

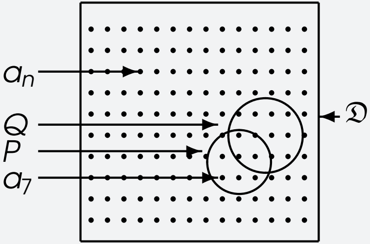
3. Klammern um bindungsstärkere von zwei benachbarten unterschiedlichen Operatoren können weggelassen werden. Bindungsstärke abnehmend: $\wedge \vee \supset \equiv$.

$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a) \vee Q(b)$

$3.^{-}$ Klammern um die bindungsstärkeren zweier benachbarter Operatoren müssen restauriert werden.

Wahrheit

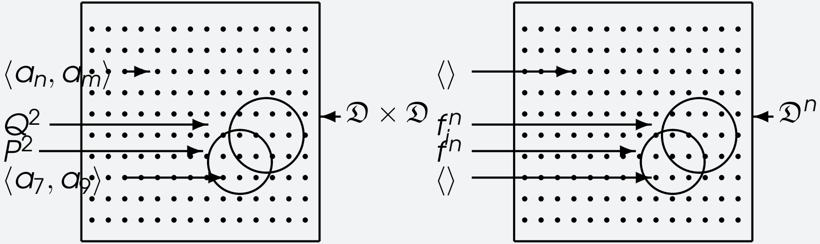
Das Wahre hat der, der das Getrennte als getrennt und das Verbundene als verbunden denkt; das Falsche ergreift, wer eben dieses Verhältnis anders auffaßt als es in Wirklichkeit ist.
(Aristoteles, Metaphysik)



$P(a_7)$ ist wahr in diesem $\mathfrak{D}$ bei dieser Verteilung der Pfeile, weil der a_7-Punkt tatsächlich im P-Kreis liegt: $\mathfrak{I}(a_7) \in \mathfrak{I}(P)$.

$Q(a_n)$ ist nicht wahr in diesem $\mathfrak{D}$ bei dieser Verteilung der Pfeile, weil der a_n-Punkt tatsächlich nicht im Q-Kreis liegt: $\mathfrak{I}(a_n) \notin \mathfrak{I}(Q)$.

Relationale Aussagen



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, der Argumentbereich IK $\cup$ IK und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Beispiel

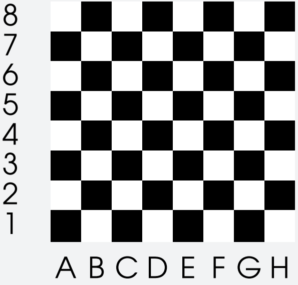
Eine konkrete Sprache:

IK: A1 – H8
PK: weiß, schwarz, ist neben, liegt horizontal zwischen, liegt vertikal zwischen, liegt diagonal zwischen

Prädikatenlogisch:

$a_1, a_2, \ldots, a_{64}, \ldots$
$P_1^1, P_2^1, Q_1^2, R_1^3, R_2^3, R_3^3, \ldots$

Ein konkretes Modell:



$\mathfrak{D} =$ die Menge der Felder.

$\mathfrak{I}$(A2) = das Feld erste Spalte, zweite Reihe

$\mathfrak{I}$(weiß) = die Menge der weißen Felder,
$\mathfrak{I}$(ist neben) = die Menge der Paare von Feldern, die nebeneinander liegen