Sprache der Prädikatenlogik

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Oktober 2011

Sprache und Metasprache

(Objekt-) Sprache ist die Sprache, in der die Sätze einer Theorie formuliert sind.

Metasprache ist die Sprache, in der über eine Sprache gesprochen wird.

„lang“ ist ein kurzes Wort.
Das Wort *lang* hat vier Buchstaben.
long ist die englische Übersetzung von „lang“.
long bedeutet lang.

Ein Adjektiv ist **heterologisch**, wenn es die Eigenschaft, die es ausdrückt, nicht besitzt.

nicht `heterologisch`(kurz), weil: „kurz“ ist kurz
`heterologisch`(lang), weil „lang“ ist nicht lang

`heterologisch`(heterologisch)?

Das Alphabet – nichtlogische Zeichen

Zeichen	**Metazeichen**	**Verwendung**	**Beispiel**
$a, b, c, \ldots$ $a_1, b_1, c_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen-konstanten	Anna, Bodo, der zahme Lö-we
$x, y, z, \ldots$ $x_1, y_1, z_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen-variablen	Gegenstand, welcher, jener
$P, Q, R, \ldots$ $P_1^1, Q_1^1, R_1^1, \ldots$	$f, f_n^m, g_n^m, \ldots$	Prädikat-konstanten	klug, liebt, gibt, Student

Das Alphabet – logische Zeichen

Zeichen	Name	vage Übersetzung
$\sim$	Negation	nicht, in-, un-
$\wedge$	Konjunktion	und, sowohl als auch
$\vee$	Adjunktion	oder
$\supset$	Subjunktion	wenn–dann
$\equiv$	Bisubjunktion	genau dann, wenn; dann und nur dann
$\forall$	Allquantor	für alle
$\exists$	Existenzquantor	für einige
$)$, $($	Klammern	Gruppierung

Die Formeldefinition – atomare Formeln

1. Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, und $i_1, \ldots, i_n$ sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (plF)**.

$P^2(a, a_1)$	Formel	Anna mag Bodo
$Q^1(x)$	Formel	klug-sein
$Q^2(a_7, y)$	Formel	der goldene Berg ist größer als ...
$P^2(P^1, a_3)$	Keine!	
$f^1(x, j)$	Keine!	(drei Fehler)

Die Formeldefinition – Aussagenlogik

3. Wenn A plF ist, ist $\sim A$ plF.

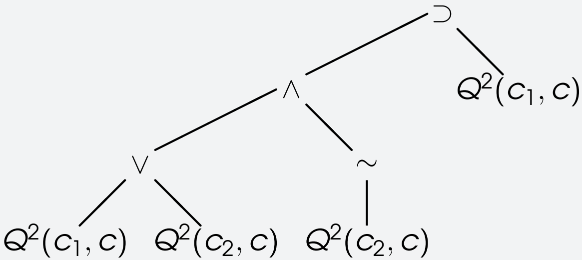
$R(x, a), \sim R(x, a), \sim\sim R(x, a), \ldots$ – mit Anna verheiratet sein, nicht mit Anna verheiratet sein, nicht nicht mit Anna verheiratet sein, . . .

4. Wenn A und B plF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ plF.

$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$
Wenn der Gärtner den Hauslehrer ermordet hat oder der Butler den Hauslehrer ermordet hat, und der Butler hat ihn nicht ermordet, dann hat ihn der Gärtner ermordet.

Zur Erholung – Malen nach Formeln

$$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge {\sim}Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$$



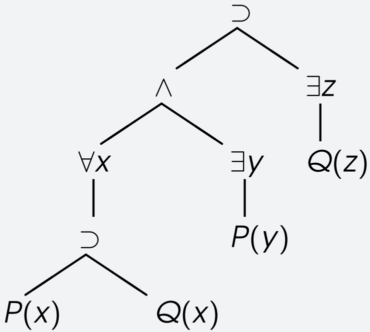
Die Formeldefinition – Quantoren

5. Wenn A eine plF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ plF.

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$
Wenn alles so ist, daß wenn es Grieche ist, es auch Mensch ist, und es Griechen gibt, dann gibt es auch Menschen.

Nochmal: Malen nach Formeln

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists y P(y)) \supset \exists z Q(z))$$



Definitionen

Hauptoperator einer Formel ist der Operator, der bei der Bildung dieser Formel zuletzt angewendet wurde.

Teilformel einer Formel ist jeder Teil der Formel, der selbst Formel ist.

Aussagenlogisch ist eine Formel die keine Quantoren enthält.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$$

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$	$\exists z Q(z)$
$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y))$	$Q(z)$
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\sim\forall y \sim P(y)$
$(P(x) \supset Q(x))$	$\forall y \sim P(y)$
$P(x)$	$\sim P(y)$
$Q(x)$	$P(y)$

Die Formeldefinition – das Ende

Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.