# Mengentheorie

Dr. Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Oktober 2011

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;
die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subset K$ genau dann,
wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subset K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.
$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge"

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subseteq K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.
$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge“

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subset K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge“

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.

$L \subseteq K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.
$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge"

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subseteq K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.
$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge“

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subset K$ genau dann, wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Mengen und Elemente

**Menge** nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ – die Menge aus $e_1, e_2, \ldots, e_n$

**Element** nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.
$e_1 \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ – „$e_1$ ist Element der Menge"

**Mengenbildung** geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.
die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest; die Primzahlen unter 10; die Achttausender

**Untermenge** einer Menge $K$ ist jede Menge, deren Elemente alle in $K$ sind.
$L \subset K$ genau dann,
wenn für alle $e \in L$ auch gilt $e \in K$

# Besondere Mengen

Die leere Menge ist die Menge, die kein einziges Element enthält:
für alle $e$ gilt: $e \notin \emptyset$

Die universale Menge ist die Menge, die alle Elemente enthält:
für alle $e$ gilt: $e \in \mathcal{U}$

Identisch sind zwei Mengen genau dann, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen:
$M_1 = M_2$ genau dann, wenn für alle $e$ gilt:
$e \in M_1$ genau dann, wenn $e \in M_2$

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen $K$ und $L$ wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus $K$ und deren zweites aus $L$ ist.

$K \times L = \{\langle d, e\rangle : d \in K \text{ und } e \in L\}$

{Anna,Ben} $\times$ Kants Kritiken $=$
$\{\langle$Anna, KdrV$\rangle$, $\langle$Anna, KdpV$\rangle$, $\langle$Anna, KdU$\rangle$
$\langle$Ben, KdrV$\rangle$, $\langle$Ben, KdpV$\rangle$, $\langle$Ben, KdU$\rangle\}$

n-faches kartesisches Produkt :

$K_1 \times \ldots \times K_n =$
$\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \ldots \text{ und } e_n \in K_n\}$
(Menge aller n-Tupel . . . )

# Kartesische Produkte

**Kartesisches Produkt** zweier Mengen $K$ und $L$ wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus $K$ und deren zweites aus $L$ ist.

$K \times L = \{\langle d, e\rangle : d \in K \text{ und } e \in L\}$

$\{\text{Anna},\text{Ben}\} \times \text{Kants Kritiken} =$
$\{\langle \text{Anna}, \text{KdrV}\rangle, \langle \text{Anna}, \text{KdpV}\rangle, \langle \text{Anna}, \text{KdU}\rangle$
$\langle \text{Ben}, \text{KdrV}\rangle, \langle \text{Ben}, \text{KdpV}\rangle, \langle \text{Ben}, \text{KdU}\rangle\}$

**n-faches kartesisches Produkt** :

$K_1 \times \ldots \times K_n =$
$\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \ldots \text{ und } e_n \in K_n\}$
(Menge aller n-Tupel . . . )

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen $K$ und $L$ wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus $K$ und deren zweites aus $L$ ist.

$K \times L = \{\langle d, e\rangle : d \in K \text{ und } e \in L\}$

$\{\text{Anna,Ben}\} \times \text{Kants Kritiken} =$
$\{\langle \text{Anna, KdrV}\rangle, \langle \text{Anna, KdpV}\rangle, \langle \text{Anna, KdU}\rangle$
$\langle \text{Ben, KdrV}\rangle, \langle \text{Ben, KdpV}\rangle, \langle \text{Ben, KdU}\rangle\}$

n-faches kartesisches Produkt :

$K_1 \times \ldots \times K_n =$
$\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \ldots \text{ und } e_n \in K_n\}$
(Menge aller n-Tupel ...)

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen $K$ und $L$ wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus $K$ und deren zweites aus $L$ ist.

$K \times L = \{\langle d, e \rangle : d \in K \text{ und } e \in L\}$

$\{\text{Anna,Ben}\} \times \text{Kants Kritiken} =$
$\{\langle \text{Anna, KdrV} \rangle, \langle \text{Anna, KdpV} \rangle, \langle \text{Anna, KdU} \rangle$
$\langle \text{Ben, KdrV} \rangle, \langle \text{Ben, KdpV} \rangle, \langle \text{Ben, KdU} \rangle\}$

n-faches kartesisches Produkt :

$K_1 \times \ldots \times K_n =$
$\{\langle e_1, \ldots, e_n \rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \ldots \text{ und } e_n \in K_n\}$
(Menge aller n-Tupel ...)

# Funktionen

**Funktion** heißt jede Abbildung von einer Menge $K$ in eine Menge $L$, die jedes Element von $K$ auf genau ein Element von $L$ abbildet.

Sei $T = \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ – die Menge der Wahrheitswerte, $K$ – die Menge der Studenten der TU und $L$ – die Menge der Zahlen. Dann sind

`kg: koerpergroesse in cm` und `mn: matrikelnummer`

Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

`kg`(Anna)=175; `kg`(Ben)=175; …

`mn`(Anna)=675665; `mn`(Ben)=348776; …

`vh: verheiratet`

eine Funktion von Studenten $\times$ Studenten in Wahrheitswerte:

`vh`(⟨Anna,Ben⟩)=`f`; `vh`(⟨Anna,Anna⟩)=`f`;

`vh`(⟨Chris,Dani⟩)=`w`; `vh`(⟨Dani,Chris⟩)=`w`

# Funktionen

**Funktion** heißt jede Abbildung von einer Menge $K$ in eine Menge $L$, die jedes Element von $K$ auf genau ein Element von $L$ abbildet.

Sei $T = \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ – die Menge der Wahrheitswerte, $K$ – die Menge der Studenten der TU und $L$ – die Menge der Zahlen. Dann sind

`kg: koerpergroesse in cm` und `mn: matrikelnummer`

Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

`kg`(Anna)=175; `kg`(Ben)=175; …

`mn`(Anna)=675665; `mn`(Ben)=348776; …

`vh: verheiratet`

eine Funktion von Studenten $\times$ Studenten in Wahrheitswerte:

`vh`(⟨Anna,Ben⟩)=`f`; `vh`(⟨Anna,Anna⟩)=`f`;

`vh`(⟨Chris,Dani⟩)=`w`; `vh`(⟨Dani,Chris⟩)=`w`

# Funktionen

**Funktion** heißt jede Abbildung von einer Menge $K$ in eine Menge $L$, die jedes Element von $K$ auf genau ein Element von $L$ abbildet.

Sei $T = \{\mathtt{w}, \mathtt{f}\}$ – die Menge der Wahrheitswerte, $K$ – die Menge der Studenten der TU und $L$ – die Menge der Zahlen. Dann sind

`kg: koerpergroesse in cm` und `mn: matrikelnummer`

Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

`kg`(Anna)=175; `kg`(Ben)=175; ...

`mn`(Anna)=675665; `mn`(Ben)=348776; ...

`vh: verheiratet`

eine Funktion von Studenten $\times$ Studenten in Wahrheitswerte:

`vh`($\langle$Anna,Ben$\rangle$)=`f`; `vh`($\langle$Anna,Anna$\rangle$)=`f`;

`vh`($\langle$Chris,Dani$\rangle$)=`w`; `vh`($\langle$Dani,Chris$\rangle$)=`w`

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstand
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstand
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstar
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstar
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstand
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches Produktes $K_1 \times \ldots \times K_n$.

Verheiratet $\subset$ Menschen $\times$ Menschen
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt_Zwischen $\subset$ Ort $\times$ Ort $\times$ Ort
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt_Zwischen $\subset$ Gegenstand $\times$ Gegenstand $\times$ Gegenstand
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen

Verursacht $\subset$ Agenten $\times$ Handlungen
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug $\subset$ Lebewesen
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Operationen über Mengen

Schnittmenge $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ und $L$ sind:
$N = K \cap L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ und $e \in L$.

Vereinigungsmenge $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ oder $L$ sind:
$N = K \cup L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ oder $e \in L$.

Komplementärmenge $N$ einer Menge $K$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von $K$ sind:
$N = \overline{K}$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \notin K$.

# Operationen über Mengen

**Schnittmenge** $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ und $L$ sind:
$N = K \cap L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ und $e \in L$.

**Vereinigungsmenge** $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ oder $L$ sind:
$N = K \cup L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ oder $e \in L$.

**Komplementärmenge** $N$ einer Menge $K$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von $K$ sind:
$N = \overline{K}$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \notin K$.

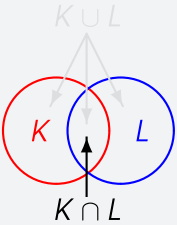
# Operationen über Mengen

Schnittmenge $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ und $L$ sind:
$N = K \cap L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ und $e \in L$.

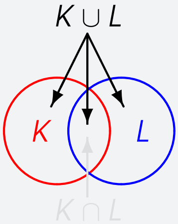
Vereinigungsmenge $N$ der Mengen $K$ und $L$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von $K$ oder $L$ sind:
$N = K \cup L$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ oder $e \in L$.

Komplementärmenge $N$ einer Menge $K$ ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von $K$ sind:
$N = \overline{K}$ genau dann, wenn für alle $e$:
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \notin K$.

# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)



# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)



# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)