5. Übungsblatt

Musterlösung

30. 1. 2013

Für manche Aufgaben gibt es mehr als einen richtigen Lösungsweg. Falls Sie nicht verstehen, warum Sie nicht alle Punkte bekommen haben, sehen Sie Ihre Lösung bitte während der Sprechstunde ein. Die Übungsblätter werden nach dem Klausurtermin vernichtet.

1. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) $\vdash \exists x \forall y P(x, y) \supset \forall y \exists x P(x, y)$

2

• Gefordert ist der Beweis einer Formel. Gearbeitet wird ohne Deduktionstheorem, im direkten Beweis:

1. {1}	$\exists x \forall y P(x, y)$	HypE $\supset$
2. {2}	$\forall y P(a, y)$	HypB $\exists$
3. {2}	$P(a, y)$	B $\forall$ 2
4. {2}	$\exists x P(x, y)$	E $\exists$ 3
5. {1}	$\exists x P(x, y)$	B $\exists$ 1, 2, 4
6. {1}	$\forall y \exists x P(x, y)$	E $\forall$ 5
7. $\emptyset$	$\exists x \forall y P(x, y) \supset \forall y \exists x P(x, y)$	E $\supset$ 1, 6

Überlegen Sie sich, warum es wichtig ist, daß:

2. a eine Konstante und neu im Beweis ist;
5. $\exists x P(x, y)$ a nicht enthält;
6. y nicht frei in 1. ist.

(b) $\forall x(P(x) \supset Q(x)), \exists xP(x) \vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ **2**

• Gefordert ist eine Ableitung. Gearbeitet wird direkt:

1.	{1}	$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	Ann
2.	{2}	$\exists xP(x)$	Ann
3.	{3}	$P(a)$	HypB $\exists$
4.	{1}	$P(a) \supset Q(a)$	B $\forall$ 1
5.	{1, 3}	$Q(a)$	B $\supset$ 1, 4
6.	{1, 3}	$P(a) \wedge Q(a)$	E $\wedge$ 3, 5
7.	{1, 3}	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	E $\exists$ 6
8.	{1, 2}	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	B $\exists$ 2, 3, 7

(c) $\sim\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \exists x(P(x) \wedge \sim Q(x)) \vdash \exists xP(x)$ **3**

• Gefordert ist eine Ableitung. Sie wird indirekt geführt und es werden einige Theoreme / zusätzliche Regeln verwendet:

1.	{1}	$\sim\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \exists x(P(x) \wedge \sim Q(x))$	Ann
2.	{2}	$\sim\exists xP(x)$	AiB
3.	{2}	$\sim P(x)$	$\frac{\Gamma \sim\exists iA}{\Gamma \sim A[i/k]}$
4.	$\emptyset$	$\sim P(x) \supset \sim(P(x) \wedge Q(x))$	The
5.	{2}	$\sim(P(x) \wedge Q(x))$	B $\supset$ 3, 4
6.	{2}	$\forall x\sim(P(x) \wedge Q(x))$	E $\forall$ 5
7.	{2}	$\sim\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall i\sim A \vdash \sim\exists iA$
8.	{1, 2}	$\exists x(P(x) \wedge \sim Q(x))$	B $\supset$ 1, 7
9.	{1, 2}	$\exists xP(x)$	$\vdash \exists i(A \wedge B) \supset \exists iA$
Wid2, 9

(d) $A \supset B \supset A \supset A$ (Achten Sie auf die Klammerung) Beweisen Sie alle Theoreme, die Sie verwenden. **3**

• Gefordert ist ein Beweis. Geführt wird eine (indirekte) Ableitung, aufgrund des geltenden Deduktionstheorems ist das in Ordnung:

1.	{1}	$A \supset B \supset A$	Ann
2.	{2}	$\sim A$	AiB
3.	{1, 2}	$\sim(A \supset B)$	$\frac{\Gamma A \supset B}{\Gamma \sim B \supset \sim A}, B \supset$
4.	$\emptyset$	$\sim(A \supset B) \supset A \wedge \sim B$	The
5.	{1, 2}	A	B $\supset$, B $\wedge$
Wid2, 5

Zu beweisen sind

- $A \supset B \supset (\sim B \supset \sim A)$
- $\sim(A \supset B) \supset A \wedge \sim B$

Die erste der Formeln ist sehr leicht indirekt zu beweisen, die zweite ist etwas schwieriger. Hier die Idee: Benutzen Sie zweimal die Regel zur Einführung einer Negation, die Hypothesen lauten $\sim A$ und B .

2. Zeigen Sie, daß die Ableitbarkeitsbeziehung transitiv und reflexiv, und daß sie nicht symmetrisch ist. 5

- Gegeben seien zwei Ableitungen $\Gamma \vdash A$ und $A \vdash B$. Man erhält eine Ableitung $\Gamma \vdash B$, indem man die beiden Ableitungen in der Reihenfolge hintereinander schreibt und eine der beiden sich ergebenden Zeilen A streicht. Also ist die Ableitung transitiv.
- Die Ableitungsbeziehung ist reflexiv, weil das Schreiben von $1.\{1\}A$ bereits die Ableitung $A \vdash A$ ist.
- Man kann leicht zeigen, daß die Ableitbarkeitsbeziehung nicht symmetrisch ist, indem man ein Gegenbeispiel anführt: $A \wedge B \vdash A$, aber $A \not\vdash A \wedge B$. (Überlegen Sie sich, warum hier ein Gegenbeispiel reicht, in den Fällen oben jedoch ein Beispiel nicht reichen würde!)

3. Zeigen Sie für drei Schlußregeln Ihrer Wahl (wählen Sie keine Quantorenregeln), daß Sie von Formeln, die gültig in einem Modell sind, zu Formeln führen, die gültig im selben Modell sind. 5

- Angenommen, eine Formel $\mathfrak{M} \models A \wedge B$. Dann gilt auch $\mathfrak{M} \models A(B)$. Also führt die Beseitigung der Konjunktion von im Modell gültigen Formeln zu solchen, die im selben Modell gültig sind.
- Angenommen, $\mathfrak{M} \models A$ und B . Dann gilt auch $\mathfrak{M} \models A \wedge B$ und die Einführung der Konjunktion führt von im Modell gültigen Formeln zu solchen, die im selben Modell gültig sind.

Nur die Quantorenregeln – insbesondere $B\exists$ – sind etwas schwieriger zu erläutern.

Zusatz Kommentieren Sie folgenden Schluß: +5

SCHLUSS Voraussetzung: Jeder korrekte Schluß hat mindestens zwei Voraussetzungen.

Folgerung: Also ist dieser Schluß (SCHLUSS) nicht korrekt.