4. Übungsblatt

Musterlösung

29. Dezember

Für manche Aufgaben gibt es mehr als einen richtigen Lösungsweg. Falls Sie nicht verstehen, warum Sie nicht alle Punkte bekommen haben, sehen Sie Ihre Lösung bitte während der Sprechstunde ein. Die Übungsblätter werden nach dem Klausurtermin vernichtet.

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln allgemeingültig sind: **4**

   (a) $P(a) \wedge (Q(a) \vee R(a)) \supset P(a) \wedge Q(a) \vee P(a) \wedge R(a)$

   • Dazu wird angenommen, es gäbe ein Modell (und eine Belegung für die Variablen, die wir hier nicht brauchen) in dem die Formel nicht gültig ist:

1.	$\mathfrak{M} \not\models P(a) \wedge (Q(a) \vee R(a)) \supset$ $\supset P(a) \wedge Q(a) \vee P(a) \wedge R(a)$	Ann
2.	$\mathfrak{M} \models P(a) \wedge (Q(a) \vee R(a))$	und
3.	$\mathfrak{M} \not\models P(a) \wedge Q(a) \vee P(a) \wedge R(a)$	1 $\supset$
4.	$\mathfrak{M} \models P(a)$	und
5.	$\mathfrak{M} \models Q(a) \vee R(a)$	2$\wedge$
6.	$\mathfrak{M} \models Q(a)$ oder $\mathfrak{M} \models R(a)$	5$\vee$
7.	$\mathfrak{M} \not\models P(a) \wedge Q(a)$	und
8.	$\mathfrak{M} \not\models P(a) \wedge R(a)$	3$\vee$
9.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \not\models Q(a)$	7$\wedge$
10.	$\mathfrak{M} \not\models P(a)$ oder $\mathfrak{M} \not\models R(a)$	8$\wedge$
11.	$\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(P)$	4 Präd
12.	$\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(Q)$ oder $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(R)$	6 Präd
13.	$\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(Q)$	9 Präd
14.	$\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(R)$	10 Präd

Die Zeilen 11–14 müssen alle gemeinsam gelten, für dasselbe Modell. Wegen 11 und 13 gilt $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(Q)$: die Interprtation von a ist nicht in der von P oder nicht in der von Q (13), in der von P ist sie aber (11), also ist nicht in der von Q. Aus den gleichen Gründen, jedoch wegen 11 und 14, gilt $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(R)$. Also ist die Interpretation der Individuenkonstanten weder in der von Q noch in der von R. 12 fordert aber, daß sie in einem von beiden sein muß – dies ist ein Widerspruch. Ein Modell, in dem die Ausgangsformel nicht gültig ist, kann es also nicht geben, daher ist sie in allen Modellen gültig.

(b) $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \land Q(a) \supset P(a)$

- Es wird wieder angenommen, die Formel wäre nicht allgemeingültig und ein Widerspruch wird gesucht.

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x(P(x) \supset Q(x)) \land Q(a)$	Ann $\supset$
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models P(a)$	Ann $\supset$
3.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x(P(x) \supset Q(x))$	und
4.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models Q(a)$	$1\land$
5.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models Q(x)$	$3\forall \supset$
6.	$\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(Q)$	$2, 4$Präd
7.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	5Präd

Können die Zeilen 6 und 7 beide gemeinsam gelten? Ja, in vielen unterschiedlichen Modellen. Unter anderem in denen, in denen es nur einen Gegenstand im Interpretationsbereich $\mathfrak{D}$ gibt, der dazu in der Q-Menge aber nicht in der P-Menge liegt.

2. Überprüfen Sie, ob die folgenden Formeln kontradiktorisch sind: **4**

(a) $P(a,b) \wedge P(b,a) \supset (P(a,b) \equiv P(b,a))$

• Angenommen, es gäbe ein Modell in dem die Formel gilt:

1. $\mathfrak{M} \not\models P(a,b) \wedge P(b,a)$ oder $\mathfrak{M} \models P(a,b) \equiv P(b,a)$ Ann $\supset$
2. $\mathfrak{M} \not\models P(a,b)$ oder $\mathfrak{M} \not\models P(b,a)$ oder
oder $\mathfrak{M} \models P(a,b)$ und $\mathfrak{M} \not\models P(b,a)$ oder
oder $\mathfrak{M} \not\models P(a,b)$ und $\mathfrak{M} \models P(b,a)$ $1\wedge \equiv$
3. $\langle \mathfrak{I}(a), \mathfrak{I}(b)\rangle \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\langle \mathfrak{I}(b), \mathfrak{I}(a)\rangle \notin \mathfrak{I}(P)$ oder
oder $\langle \mathfrak{I}(a), \mathfrak{I}(b)\rangle \in \mathfrak{I}(P)$ und $\langle \mathfrak{I}(b), \mathfrak{I}(a)\rangle \notin \mathfrak{I}(P)$
oder $\langle \mathfrak{I}(a), \mathfrak{I}(b)\rangle \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\langle \mathfrak{I}(b), \mathfrak{I}(a)\rangle \in \mathfrak{I}(P)$ 2Präd

Die „und“ in den Zeilen 2 und 3 binden stärker als die „oder“ (nicht, daß das generell so wäre, hier ist das so aufgrund der Ausgangsformel), so daß es für das Erfüllen der Bedingung in 3 ausreicht, wenn eine der Alternativen in einem Modell realisiert werden kann. So ein Modell ist beispielsweise eines, in dem $\langle \mathfrak{I}(a), \mathfrak{I}(b)\rangle \notin \mathfrak{I}(P)$ gilt – seien die entsprechenden Interpretationen Anna, Bodo und Lieben, und Anna liebe Bodo nicht. Da es ein solches Modell gibt, ist die Formel nicht kontradiktorisch.

(b) $\exists x(P(x) \wedge {\sim}P(x) \wedge {\sim}Q(x))$

• Angenommen, in einem Modell $\mathfrak{M}$ unter einer Belegung $\mathfrak{V}$ würde die Formel wahr sein:

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x(P(x) \wedge {\sim}P(x) \wedge {\sim}Q(x))$ Ann
2. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models P(x) \wedge {\sim}P(x) \wedge {\sim}Q(x)$ $1\exists$
3. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models P(x)$ und
und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models Q(x)$ $2 \wedge \sim$
4. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und
und $\mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ 3Präd

Es ist leicht zu sehen, daß für das Erfüllen von 4 eine Belegung und eine Interpretation erforderlich sind, die ein Element des Interpretationsbereiches sowohl innerhalb als auch außerhalb der P-Menge setzt. Das ist ein Widerspruch und die Formel ist eine Kontradiktion.

3. Überprüfen Sie, ob die folgende Behauptung gilt: **4**

(a) $\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \approx \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$

- Damit die beiden Formeln äquivalent sind, muß gelten

(1) $\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y)) \models \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$

(2) $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \models \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$

Gilt eine der beiden Behauptungen nicht, sind die Formeln nicht äquivalent.

(1) Von links nach rechts: Angenommen, die Prämisse gilt und die Konklusion nicht:

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$ Ann
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$ Ann
3. für alle $\mathfrak{V}_{xy}$ für alle $\mathfrak{V}_x$:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy} \models P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy} \models Q(y)$ $1\forall\forall\wedge$
4. für alle $\mathfrak{V}_{xy}$ für alle $\mathfrak{V}_x$:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ Präd3
5. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall y Q(y)$ $2\wedge$
6. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x)$ oder
oder für ein $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_y \not\models Q(y)$ $5\forall\forall$
7. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder
oder für ein $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{V}_y(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ 6Präd

Tatsächlich ist $\mathfrak{V}_x(x)$ aus 7 unter den Werten, die die $\mathfrak{V}_{xy}$ für x annehmen können – nämlich dann, wenn der Wert für y nicht geändert wird. 4 schließt damit die erste Alternative aus 7 aus. Auch der Wert $\mathfrak{V}_y(y)$ aus 7 ist unter den Werten, die die $\mathfrak{V}_{xy}$ für y annehmen können – nämlich dann, wenn der Wert für x nicht geändert wurde. Damit ist die zweite Alternative aus 7 ausgeschlossen – das ist aber der gesuchte Widerspruch. (1) ist damit gültig.

(2) Von rechts nach links: Angenommen, die Prämisse gilt und die Konklusion nicht:

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$ Ann
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall y Q(y)$ Ann
3. für ein $\mathfrak{V}_{xy}$ für ein $\mathfrak{V}_x$:
$\mathfrak{V}_{xy}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_{xy}(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$ $1\forall\forall \wedge$ Präd
4. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ $2\forall$Präd
5. für alle $\mathfrak{V}_y : \mathfrak{V}_y(y) \in \mathfrak{I}(Q)$ $2\forall$Präd

Den gesuchten Wert aus 3 kann es nicht geben, da alle Werte nach 4 und 5 sowohl in der P- als auch in der Q-Menge liegen.

4. Überprüfen Sie, ob die folgende Menge inkonsistent ist:: **2**

   (a) $\{\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y)), \exists x \exists y(\sim P(x) \vee \sim Q(y))\}$

   - Eine Formelmenge Γ ist inkonsistent, wenn sich eine Formel A so finden läßt, daß gilt:
     $\Gamma \models A \qquad \Gamma \models \sim A$.
     Solche Formelmengen haben kein Modell (denn dieses angenommene Modell wäre eines für A und auch $\sim A$), so gilt also: Wenn eine Formelmenge ein Modell hat, ist sie nicht inkonsistent. Überprüft werden muß daher, ob die gegebene Menge ein Modell haben kann – angenommen, sie hätte eines ...

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$	Ann
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x \exists y(\sim P(x) \vee \sim Q(y))$	Ann
3.	für alle $\mathfrak{V}_{xy}$ für alle $\mathfrak{V}_x$: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(y) \in \mathfrak{I}(Q)$	3a, (1)1
4.	für ein $\mathfrak{V}_{xy}$ für ein $\mathfrak{V}_x$: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_{xy}(y) \notin \mathfrak{I}(Q)$	analog Z. 32

     Es ist gut zu sehen, daß wenn die Belegungen aus 4 fixiert werden, die Bedingung 3 nicht mehr erfüllt werden kann. Es kann also kein Modell für die Formelmenge geben und die letztere ist inkonsistent.

   - Hier ist eine zweite, direktere Methode: Zeigen Sie

     (1) $\{\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y)), \exists x \exists y(\sim P(x) \vee \sim Q(y))\} \models \forall x P(x)$

     (2) $\{\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y)), \exists x \exists y(\sim P(x) \vee \sim Q(y))\} \models \sim \forall x P(x)$

5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen gelten: **4**

   Achtung, Fehler in Aufgabenstellung beseitigt! (11.12.)

   (a) $P(a), \sim P(a) \models R(a, b, c)$

   - Jedes Modell, in dem $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(P)$ und auch $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ gelten, ist auch eines für jede beliebige andere Formel – nämlich keines.

(b) Wenn $A \models B$ und $A \models {\sim}B$, dann $\emptyset \models {\sim}A$.

   - Wenn die Voraussetzungen gelten, ist $\{A\}$ inkonsistent. Dann ist es eine Kontradiktion. Dann ist seine Negation eine Tautologie – und genau das wird behauptet.

6. Lesen Sie nach, was Realismus und Antirealismus sind. Erläutern Sie auf diesem Hintergrund, was es heißt, daß es unentscheidbare Aussagen gibt. **2**

   - Die Menge der allgemeingültigen Aussagen der Prädikatenlogik ist insofern unentscheidbar, als daß es kein allgemeines Verfahren gibt für jede vorgegebene Formel zu entscheiden, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Geht man von realistischen Vorstellungen aus (Aussagen erhalten ihren Wahrheitswert aufgrund der Gegebenheiten in der Welt und diese sind prinzipiell auch erkennbar), dann sollte es keine unentscheidbaren Probleme geben.

7. Wie muß man die beiden folgenden Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik übersetzen, wo ist der Unterschied? **+4**

   (a) Eines Tages verstehst du das.

   (b) Eines Tages kommt niemals.

   Wissen Sie, woher das kommt? Someday never comes, CCR

   - Die erste Aussage sollte am besten als quantifizierte Aussage über Tage (Momente) übersetzt werden. In der zweiten ist „eines Tages“ ein Name und sollte als Individuenkonstante übersetzt werden.