3. Übungsblatt

Musterlösung

1. Beweisen Sie:

   (a) $A \models A$ **2**

   - Angenommen, es wäre nicht so. Dann gäbe es nach Definition der Folgebeziehung ein Modell, in dem A gültig ist und auch nicht gültig ist. So ein Modell kann es nicht geben, also ist A gültig in allen Modellen, in denen es gültig ist. (Als ob Sie's nicht gewußt hätten ☺)

   (b) Wenn $A \models B$ und $B \models C$, dann $A \models C$ **2**

   - Angenommen, es wäre nicht so. Dann würden (1) alle Modelle, in denen A gültig ist, auch Modelle für B, (2) alle Modelle, in denen B gültig ist, auch Modelle für C sein, und (3) gäbe es ein Modell welches A gültig werden läßt, aber nicht C. In diesem speziellen Modell ist aber B nicht gültig (sonst würde (2) nicht wahr sein). Ist aber in diesem Modell B nicht gültig, kann A wegen (1) in diesem Modell auch nicht gültig sein. Das widerspricht (3), also gilt unter der Voraussetzung (1) und (2), daß jedes Modell für A auch eines für C ist – die Aussage oben ist wahr.

   (c) Es gilt nicht immer: Wenn $A \models B$, dann $B \models A$ **2**

   - Wie man leicht sieht, stimmen die beiden Aussagen:

   $$P(a) \wedge P(b) \models P(a)$$
   $$P(a) \not\models P(a) \wedge P(b)$$

   Also stimmt die Aussage oben.

   Bemerkung: Hier reicht ein Beispiel! Wenn etwas für irgendeinen Fall <u>nicht</u> gilt, gilt es auch allgemein nicht.

(d) Es gilt nicht immer: Wenn $A \models B$, dann $B \not\models A$ **2**

- Wie man leicht sieht, stimmen die beiden Aussagen:

$$P(a) \models \sim\sim P(a)$$
$$\sim\sim P(a) \models P(a)$$

2. Zeigen Sie, ob die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

   - Die semantischen Regeln für die Bisubjunktion $\equiv$ sind so, daß eine Bisubjunktion nur dann allgemeingültig sein kann, wenn die Subjunktionen in beide Richtungen allgemeingültig sind. (Das kann man einfach beweisen – versuchen Sie es!) Für die Allgemeingültigkeit muß man also die <u>beider</u> Subjunktionen nachweisen, für die Nicht-Allgemeingültigkeit reicht die Nicht-Allgemeingültigkeit <u>einer</u> der Subjunktionen aus.

   (a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ **2**

   - Annahme: Die Formel ist nicht allgemeingültig.

   (I)

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$	Ann.
2.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models P(x) \wedge Q(x)$	$1 \supset \forall$
3.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	$2 \wedge$ Pred
4.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall xP(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall xQ(x)$	$1 \supset \wedge$
5.	für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$	$4\forall$Pred

3. heißt, jede Wahl von $\mathfrak{V}_x$ produziert für x ein Element von $\mathfrak{D}$, welches in $\mathfrak{I}(P) \cap \mathfrak{I}(Q)$ liegt. Das heißt, außerhalb dieser Menge gibt es keine Gegenstände. Dann gibt es keine Wahl von $\mathfrak{V}_x$ so, daß der Wert für x außerhalb von $\mathfrak{I}(P)$ oder aber von $\mathfrak{I}(Q)$ liegt. Das aber ist in 5. gefordert – Widerspruch.

(II)

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x (P(x) \wedge Q(x))$	Ann.
2.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$	$1 \supset \wedge\forall$Pred
3.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	$1 \supset \wedge\forall$Pred
4.	für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$	$1 \supset \forall \wedge$ Pred

4. sagt, daß es eine Wahl für $\mathfrak{V}_x$ gibt, deren Wert für x außerhalb von $\mathfrak{I}(P)$ oder aber außerhalb von $\mathfrak{I}(Q)$ liegt. Das ist nach 2. und 3. unmöglich. Widerspruch.

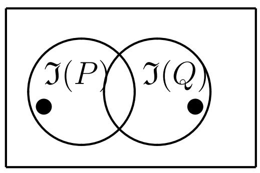
(b) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ **2**

- Annahme: Die Formel ist nicht allgemeingültig.

(I)

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \wedge Q(x))$	Ann.
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x Q(x)$	$1 \supset$
3.	für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	$2\exists$Pred
4.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x) \wedge Q(x)$	$1 \supset \exists$
5.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x \notin \mathfrak{I}(Q)$	$4 \wedge$ Pred

Da ist kein Widerspruch, es muß eine Belegung für x geben, die in der Interpretation für P liegt, eine die in der Interpretation von Q liegt (nicht notwendig dieselbe) – 3.; und alle Belegungen für x müssen außerhalb der Interpretation von P oder der von Q liegen – 5. Das geht aber:



Wir benötigen eine Welt aus mindestens zwei Gegenständen, von denen einer die eine, der andere die andere Eigenschaft hat, aber keiner beide.

Die Subjunktion ist nicht allgemeingültig (es gibt ein widerlegendes Modell), also auch die Bisubjunktion nicht.

(c) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ **2**

- Annahme: Die Formel ist nicht allgemeingültig.

Dann sollte $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ kein Modell haben. Das Modell in der vorigen Aufgabe ist aber auch ein widerlegendes Modell für diese Subjunktion (alle – beiden – Elemente von $\mathfrak{D}$ haben die P- oder die Q-Eigenschaft, aber nicht alle haben die P- und nicht alle die Q-Eigenschaft).

Oder: Alles ist rot oder nicht-rot. Aber nicht alles ist rot und nicht alles ist nicht-rot.

Also ist die Bisubjunktion nicht allgemeingültig.

(d) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ **2**

- Annahme: Die Formel ist nicht allgemeingültig.

(I)

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ Ann
2. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \models P(x) \vee Q(x)$ $1 \supset \exists$
3. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ $2 \vee$ Pred
4. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x Q(x)$ $1 \supset \vee$
5. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$
   und für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$ 4$\exists$Pred

Da ist ein Widerspruch: Wenn jede Belegung für x außerhalb der P- und auch der Q-Eigenschaft liegt (5.), kann es keine geben, die in der Interpretation von P oder eine die in der von Q liegt (3.).

(II)

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x))$ Ann
2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x P(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x Q(x)$ $1 \supset \vee$
3. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$
   oder für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ 2$\exists$Pred
4. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{V}_x \not\models P(x) \vee Q(x)$ $1 \supset \exists$
5. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$ $\vee$Pred

Da ist ein Widerspruch – falls jede Belegung von x außerhalb der Interpretation von P und auch der von Q liegt, gibt es keine Belegung die innerhalb der P- (oder aber der Q-) Eigenschaft liegt.

Die Bisubjunktion ist allgemeingültig.

3. Sind die folgenden Mengen inkonsistent?

(a) $\{\forall x P(x), \sim P(y)\}$ **2**

- Angenommen, sie wäre es nicht. Dann gäbe es ein Modell, in dem beide Formeln gültig wären:

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim P(y)$ Ann
2. für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}(y) \notin \mathfrak{I}(P)$ ∀Pred∼Pred

Da ist ein Widerspruch, wenn es keine Belegungsmöglichkeit für x außerhalb der Interpretation von P gibt, kann auch y nicht entsprechend belegt werden. Die Menge ist inkonsistent.

(b) $\{\exists x P(x), \sim P(x)\}$ **2**

- Angenommen, sie wäre es nicht. Dann gäbe es ein Modell, in dem beide Formeln gültig wären:

1. $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x P(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim P(x)$ Ann
2. für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ ∃Pred∼Pred

In einer Welt mit (wenigstens) zwei Gegenständen, von denen eines in der Interpretation von P liegt und eines nicht, lassen sich leicht entsprechende Belegungen für x finden. Es gibt also ein Modell für die Menge – sie ist nicht inkonsistent.

ZUSATZ Betrachten Sie die beiden folgenden Argumente:

I	II
Alle Löwen sind gefährlich. Einige gefährlichen (Tiere) sind Katzen. Also: Einige Löwen sind Katzen.	Alle Löwen sind gefährlich. Einige Löwen sind hungrig. Also: Einige hungrigen (Tiere) sind gefährlich.

(a) Lesen Sie in der Wikipedia den Artikel „Syllogismus“. Sind das syllogistische Schlüsse? Begründen Sie kurz. **2**

- Drei Aussagen entsprechender Form mit drei (generellen) Termini, wobei der eine („mittlere“) in beiden Prämissen vorkommt – das ist das allgemeine Syllogismus-Schema. Versteht man unter einem syllogistischen Schluß nur die gültigen Schlüsse, ist einer einer, der andere nicht.

(b) Formalisieren Sie die Argumente in der Sprache der Prädikatenlogik. **4**

-

I	II
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\forall x(P(x) \supset Q(x))$
$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$
Also:	Also:
$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$.

(c) Überprüfen Sie, ob die Schlußfolgerung jeweils tatsächlich aus den Prämissen logisch folgt. **4**

- Angenommen, daß nicht:

(I)

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x(P(x) \supset Q(x))$	Ann
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x(Q(x) \wedge R(x))$	Ann
3.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x(P(x) \wedge R(x))$	Ann
4.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	1
5.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(R)$	3
6.	für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ und $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(R)$	2

In einem Gegenstandsbereich, in dem $\mathfrak{I}(P) = \emptyset$ und es einen Gegenstand gibt, der die Q- und R-Eigenschaft gleichzeitig hat, können die Prämissen gültig und die Schlußfolgerung ungültig sein. Dies ist keine gültige logische Folgebeziehung.

(I)

1.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall x(P(x) \supset Q(x))$	Ann
2.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists x(P(x) \wedge R(x))$	Ann
3.	$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models \exists x(R(x) \wedge Q(x))$	Ann
4.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$	1
5.	für alle $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(R)$ oder $\mathfrak{V}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$	3
6.	für ein $\mathfrak{V}_x : \mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{V}_x(x) \in \mathfrak{I}(R)$	2

Da ist ein Widerspruch: Die Belegung aus 6. erfordert, daß deren Wert für x sowohl in als auch außerhalb der Interpretation von Q liegt. Es handelt sich um eine gültige logische Folgebeziehung.