Einführung in die Logik

Ringvorlesung am 21. November 2002[1]

Uwe Scheffler[2]

[1]Text unter: www2.hu-berlin.de/∼h0126kar
[2]SchefflerU@philosophie.hu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Theorien als Satzmengen

Jede Wissenschaft, auch wissenschaftlich betriebene Philosophie, kann man von dem Standpunkt her betrachten, daß sie Sätze über ein bestimmtes Gebiet in wahre und falsche einzuteilen versucht. Das liegt daran, daß wissenschaftliche Theorien als Texte vorliegen, Satzmengen sozusagen. Sätze, die zu der entsprechenden Satzmenge gehören, werden im Rahmen der Theorie als wahr anerkannt, die anderen nicht. Wissenschaft beschäftigt sich mit Wahrheit.

Der umrissene Standpunkt ist ein ziemlich grobes Modell, wie wir seit langem wissen. Zunächst gehören zu wissenschaftlichen Theorien nicht nur Aussagesätze, die wahr (oder falsch) sein können. Theorien können sich dadurch unterscheiden, daß verschiedene Fragen gestellt und Probleme untersucht werden, oder durch verschiedene Methoden, wie man zu den Sätzen kommt. Für eine wissenschaftshistorische oder wissenschaftssoziologische Untersuchung sind das ganz gravierende Unterschiede, wir können aber, um das Modell einfach zu halten, davon ausgehen, daß sich solche Unterschiede dann doch irgendwie in Unterschieden zwischen den entsprechenden Satzmengen niederschlagen. Außerdem können Theorien unentschieden darüber sein, ob ein bestimmter Satz nun wahr oder falsch ist – man möchte jetzt oder überhaupt nicht allen Sätzen genau einen der Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zuschreiben. Das ist im Moment für uns kein Problem: Wir werden „falsch“ als synonym zu „nicht wahr“ behandeln und solche unentschiedenen Sätze solange unter die falschen zählen, solange sich kein Grund dafür ergibt, sie für wahr zu halten. Wenn es nötig wird, kann man das Modell an dieser Stelle verfeinern, hier müssen wir das nicht tun.

Was für Sätze gelangen eigentlich in eine solche Satzmenge hinein? Nun, kurzes Nachdenken bringt uns auf einige Kandidaten: Sätze, deren Wahrheit als gut bestätigt gilt, gehören ganz gewiß ebenso dazu wie Sätze, die aufgrund von Definitionen gelten. Falls wir in der Theorie rechnen wollten, dann sollten die mathematischen Sätze in der Satzmenge sein und vielleicht gibt es noch Grundannahmen, die innerhalb der Theorie nicht mehr hinterfragt werden können (aber beispielsweise im Rahmen einer umfassenderen, vielleicht philosophischen Theorie). Reicht das aus? Betrachten wir ein Beispiel:

In einer Theorie **T1** über Pferde seien folgende Aussagen:

T1-1 Kein Pferd hat Flügel.

T1-2 Alle Schimmel sind Pferde.

T1-3 Pegasus ist ein Schimmel.

T1-4 Pegasus hat Flügel.

T1-5 Hansi ist ein Schimmel.

Die erste der Aussagen ist genau wie die fünfte aufgrund empirischer Untersuchungen gewonnen worden, die zweite gilt aufgrund der Definition des Wortes „Schimmel“ (d.i.: Pferde, die weiß sind), die dritte und die vierte seien ebenfalls aufgrund einer Festlegung über den Gebrauch eines Terminus gewonnen worden (Pegasus als geflügelter Schimmel). Was als erstes auffällt, ist, das die Theorie mehr über die Welt aussagt, als explizit in ihr behauptet wird. Jeder, der die deutsche Sprache hinreichend beherrscht, wird einsehen, daß gemäß der Theorie **T1** auch gilt:

T1-6 Hansi ist ein Pferd.

T1-7 Hansi ist ungeflügelt.

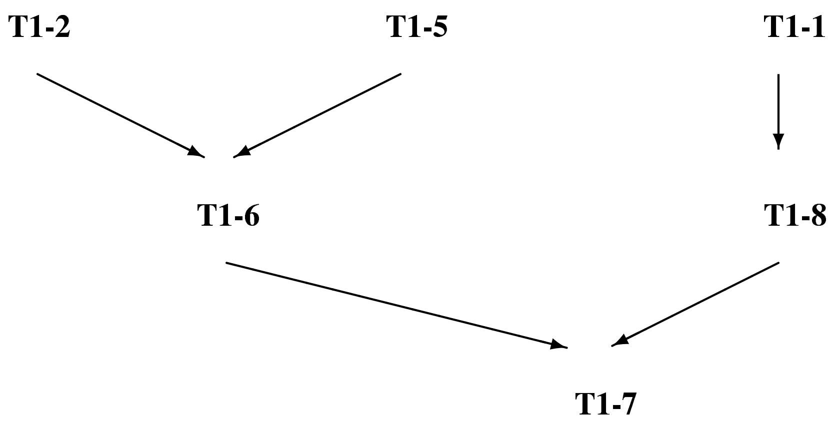
T1-6 wird unmittelbar mitbehauptet, wenn T1-2 und T1-5 behauptet werden: in der Information über die Welt, die durch die letzteren beiden Sätze vermittelt wird, ist die Information, daß Hansi ein Pferd ist, enthalten. Im Falle von T1-7 ist das nicht unmittelbar, aber doch immer noch deutlich zu sehen:

Wegen T1-1 gilt:

T1-8 Alle Pferde sind ungeflügelt.

und wegen T1-8 und T1-6 dann T1-7. Für T1-7 ergibt sich also eine Art Herleitungsbaum (Abbildung 1), bei dem die Blätter (Zweigspitzen) explizit in der Theorie (Satzmenge) **T1** sind und die Wurzel der hergeleitetete Satz ist:

Abbildung 1: Ein Herleitungsbaum in **T1**



Da die Theorie im Idealfall alle wahren Sätze über den sie betreffenden Weltausschnitt enthalten soll, werden wir Sätze wie T1-6, T1-7 und T1-8 zur Satzmenge hinzuzählen, die wir mit **T1** bezeichnet haben. Genau zu diesem Zweck betreiben Menschen schließlich Wissenschaft als ein *systematisches* Unternehmen (und nicht als bloßes Faktensammeln) – damit man aufgrund vorhandenen Wissens auf die Wahrheit weiterer Aussagen schließen kann.

Sind dies bereits alle Sätze, die wir ohne weiteres zu **T1** hinzufügen können? Es gibt eine Reihe von Sätzen, die in jeder Theorie, in der sie formulierbar sind, akzeptiert werden:

T1-9 Hansi ist Pegasus oder es ist nicht so, daß Hansi Pegasus ist.

Die Theorie **T1** sagt uns nicht, ob „Hansi ist Pegasus“ wahr ist, es könnte immerhin sein. Man könnte sich etwa zwei Theorien auf der Basis von **T1** vorstellen,

T1^1 und **T1**^{2}, die sich darin unterscheiden, daß gemäß der ersten Hansi und Pegasus ein und derselbe Gegenstand sind, gemäß der zweiten aber verschieden. Der Satz T1-9 ist in beiden (und auch in **T1**) wahr, weil wir das satzverbindende Wort „oder" so verwenden, daß der Gesamtsatz wahr wird, wenn bereits einer der beiden verbundenen Teilsätze wahr wird. Außerdem ist T1-9 so formuliert, daß (wegen der Verwendung von „es ist nicht so, daß") bei Falschheit eines Teilsatzes der andere stets wahr ist[1]. Egal wie unsere Theorien über Hansi und Pegasus auch immer sind wird also entweder der erste oder der zweite Teilsatz von T1-9 wahr in der Theorie sein und damit T1-9.

Zusammenfassung Bei der Suche nach der Wahrheit treffen wir – neben den empirisch gefundenen und den definitorisch festgelegten – auf zwei weitere Sorten von Aussagen: Aussagen, deren Gültigkeit von einmal akzeptierten Aussagen abhängt und Aussagen, die in jeder Theorie gültig sind. Für die Logik sind genau die hinter diesen Charakterisierungen stehenden Konzepte des *Beweises* und des *logisch wahren Satzes* interessant. Beide Problemfelder sind keine Kinder der modernen Logik:

> Ein Schluß ist also eine Rede, in der bei bestimmten Annahmen etwas anderes als das Vorausgesetzte mit Notwendigkeit folgt. Es ist nun eine Demonstration, wenn der Schluß aus wahren und ersten Sätzen gewonnen wird oder aus solchen, deren Erkenntnis aus wahren und ersten Sätzen entspringt.
>
> Aristoteles, *Topik* I 1

> Es gibt auch zwei Arten von Wahrheiten: Vernunftwahrheiten und Tatsachenwahrheiten. Die Vernunftwahrheiten sind notwendig und ihr Gegenteil ist unmöglich; die Tatsachenwahrheiten sind zufällig und ihr Gegenteil ist möglich. Wenn eine Wahrheit notwendig ist, so kann man ihren Grund durch Analyse finden, indem man sie in einfachere Ideen und Wahrheiten auflöst, bis man schließlich zu den elementaren Grundwahrheiten gelangt.
>
> Leibniz, *Monadologie* 33

[1] Wir nutzen an dieser Stelle die oben getroffene Vereinbarung, „falsch" wie „nicht wahr" zu verstehen.

2 Logische Wahrheit

Es gibt verschiedene Ansätze, den Begriff der logischen Wahrheit zu explizieren. Hier werden zwei prinzipielle Wege vorgestellt, die auf unterschiedliche Weise ausgestaltet werden können. Der erste Weg beginnt mit einem wichtigen und wesentlichen Abstraktionsschritt: Wir wollen uns klarmachen, daß es uns für die Explikation von logischer Wahrheit um *beliebige* Theorien, also nicht nur um adäquate oder sinnvolle oder wahrscheinliche, geht. Wir haben das Ziel, die folgende Idee zu fassen:

> Ein Satz ist logisch wahr, wenn er in jeder beliebigen Theorie gilt.

Dies entspricht durchaus Leibniz' Gedanken, daß Vernunftwahrheiten unabhängig davon aufgedeckt werden können, wie die Welt tatsächlich ist. Wären sie von einem bestimmten Zustand der Welt abhängig, von Tatsachen, dann würden sie nur in einigen (unter anderem den richtigen, den adäquaten) Theorien gelten.

Wir haben oben gesehen, daß der Satz T1-9 allein aufgrund der Art und Weise gilt, wie wir im Deutschen die Worte „oder" und „es ist nicht so, daß" verwenden. Wir haben dabei die Tatsachen genutzt, daß ein *oder*-Satz in einer Theorie bereits dann gilt, wenn einer seiner Teilsätze in dieser Theorie gilt, und daß ein *nicht*-Satz in einer Theorie genau dann gilt, wenn der um das„es ist nicht so, daß" reduzierte Satz in der Theorie nicht gilt. Alfred Tarski hat 1935[2] solche Regeln für das Zurückführen der Wahrheitswerte komplexer Sätze in formalisierten Sprachen auf die Werte der Bestandteile unter Berücksichtigung der Art der Verknüpfung aufgestellt und untersucht. Für natürliche Sprachen sind Tarskis Ergebnisse beispielsweise dadurch relevant, daß man die Operatoren der formalisierten Sprachen als idealisierte Explikationen der entsprechenden Satzverknüpfungen oder quantifizierenden Ausdrücke der natürlichen Sprache auffassen kann. Damit modellieren formale Sprachen Fragmente der natürlichen Sprache und setzen – wegen der ihnen eigenen Korrektheit und Durchsichtigkeit – Standards für die Verwendung der untersuchten Ausdrücke außerhalb der Fragmente.

Wie sehen solche Regeln aus? Wir gehen davon aus, daß alle einfachen Aussagen eines Textes wie T1-6 „Hansi ist ein Pferd" einen gemeinsamen Gegenstandsbereich haben, aus dem „Hansi" genau so eine Interpretation bekommt (ein bestimmtes Pferd), wie „Pferd" (die Menge der Pferde). Feinheiten beiseite gelassen, ist T1-6 dann wahr in einer Sprache, wenn in dem Gegenstandsbereich bei der gegebenen Interpretation das mit „Hansi" bezeichnete in die mit „Pferd"

[2] *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*

bezeichnete Menge fällt. Man kann sich leicht eine Sprache vorstellen, die den gleichen Gegenstandsbereich wie die eben vorausgesetzte hat, deren Interpretation sich jedoch dadurch unterscheidet, daß “Hansi“ nun als ein ganz bestimmter Kanarienvogel interpretiert ist. Bei dieser Interpretation ist T1-6 für den Gegenstandsbereich falsch (da das mit „Hansi“ bezeichnete nicht in die Menge der Pferde fällt). Die *logische* Verwendung der korrespondierenden Ausdrücke für „oder“ und „es ist nicht so, daß“ läßt sich dann leicht festlegen:

TS1 Eine *oder*-Aussage ist nur dann falsch in einer Sprache bei einer Interpretation und für einen Gegenstandsbereich, wenn beide Teilaussagen in der Sprache bei der Interpretation für diesen Gegenstandsbereich falsch sind – sonst ist sie wahr.

TS2 Eine *nicht*-Aussage ist nur dann wahr in einer Sprache bei einer Interpretation und für einen Gegenstandsbereich, wenn die um „es ist nicht so, daß“ reduzierte Aussage in der Sprache bei der Interpretation für diesen Gegenstandsbereich falsch ist – sonst ist sie falsch.

Es läßt sich leicht zeigen, daß für die Sprachen der klassischen Logik beispielsweise die manchmal „logische Grundgesetze“ genannten Sätze

> Wenn etwas so ist, dann ist es so. (Identitätssatz)
>
> Es ist nicht der Fall, daß etwas so ist und nicht so ist. (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch)
>
> Es ist so oder es ist nicht so. (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)

in allen Gegenstandsbereichen für alle Interpretationen wahr sind: sie sind logisch wahr. Der so eingeführte Begriff der logischen Wahrheit genügt der oben genannten Forderung: Solche Sätze können wir zu jeder beliebigen Theorie hinzufügen. Da sie in beliebigen Gegenstandsbereichen wahr sind und ihre Wahrheit nicht davon abhängt, was mit den vorkommenden bedeutungstragenden Worten genau bezeichnet wird, sind sie unabhängig davon wahr, was die Theorie für konkrete Aussagen über den Gegenstandsbereich macht.

Der angekündigte zweite Ansatz zur Explikation von logischer Wahrheit geht einen etwas anderen Weg. Ausgangspunkt ist nicht die Gültigkeit in jeder Theorie, sondern die auch von Leibniz schon konstatierte Unabhängigkeit von Tatsachen:

> Ein Satz ist logisch wahr, wenn er allein aufgrund seiner logischen Form gilt.

Der Terminus „logische Form“ wird hier nicht definiert werden, wir wollen uns aber zwei Punkte klarmachen. Zum einen wird er im Gegensatz zum Inhalt des Satzes gebraucht, aller konkreter Bezug des Satzes auf den Bereich, über den gesprochen wird, kann für die logische Form keine Rolle spielen. Zum anderen ist die logische Form eines Satzes davon abhängig, welche Analysemittel zur Verfügung stehen – je nach (formaler) Sprache und Absicht können beispielsweise „Sokrates ist weise“ und „Sokrates besitzt Weisheit“ dieselbe oder unterschiedliche logische Form haben.

Sätze sind Sätze über einen – möglicherweise abstrakten oder gar fiktionalen – Gegenstandsbereich. Der Beispielsatz B

B Alpha wird genau dann gewinnen, wenn Beta schlecht startet und Cora behindert oder wenn Beta doch nicht schlecht startet und Cora trotzdem von Beta behindert wird.

ist ein Satz über Alpha, Beta und Cora und ihre Siegeschancen beim Pferderennen. Mit etwas Übung „entdeckt“ man schnell die bedeutungstragenden Einheiten auf Satzebene:

BA	—	Alpha wird gewinnen
BB	—	Beta startet schlecht
BC	—	Cora wird von Beta behindert

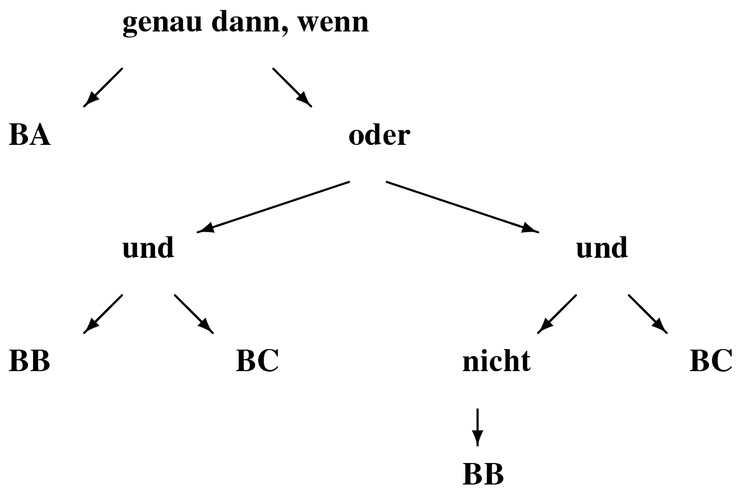
Man kann die Struktur dieses Satzes als Verknüpfung dieser einfachsten Teilsätze (kein Teil von BA, BB oder BC ist selbst noch Satz) darstellen, beispielsweise als Baum in Abbildung 2.

Es ist genau diese Struktur, die die logische Form ausmacht; der Satz

B-2 Adam wird dann und nur dann gewählt, wenn Bea ein schlechtes Fernsehduell abliefert und Chris sich auf Adams Seite schlägt oder wenn Bea doch kein schlechtes Fernsehduell abliefert und Chris trotzdem Adam unterstützt.

ist einer über einen (fiktiven) Wahlkampf und beteiligte Menschen, hat aber die gleiche logische Struktur. Von einigen stilistischen Unterschieden abgesehen unterscheiden sich die Sätze B und B-2 nur darin, welche konkreten Sätze über welchen Gegenstandsbereich die Rolle von BA, BB und BC in Abbildung 2 spielen. Die logische Form des Satzes bleibt also gleich, wenn man bedeutungstragende Einheiten gegen andere bedeutungstragende Einheiten nach gewissen Regeln austauscht:

Abbildung 2: Die logische Form



Alpha wird gewinnen	*gegen*	Adam wird gewählt
Beta startet schlecht	*gegen*	Bea liefert kein gutes Fernsehduell
Cora wird von Beta behindert	*gegen*	Chris unterstützt Adam

Es ist offensichtlich, daß diese Transformation den Wahrheitswert des komplexen Satzes nicht unberührt lassen muß. Es ist leicht nachzuvollziehen, daß wenn Alpha gewinnt und Cora behindert wird, B ein wahrer Satz ist, während B-2 falsch ist, falls Adam gewählt wird aber keine Unterstützung von Chris hatte. Es gibt aber Sätze, die wahr sind und nach jeder dieser Ersetzungen wahr bleiben – und dies sind, dem zweiten Ansatz zufolge, die logisch wahren Sätze. Die Sätze B und B-2 sind keine logisch wahren Sätze, selbst wenn sie wahr wären, hätten sie Sätze gleicher logischer Form, die falsch sind. Der Satz T-9 „Hansi ist Pegasus oder es ist nicht so, daß Hansi Pegasus ist“ ist dagegen ein logisch wahrer Satz, denn alle Sätze mit derselben logischen Form sind wahr.

Im Ableitungsbaum in der Abbildung 1 sind drei Schritte dargestellt, mit denen man T1-7 aufgrund der Theorie **T1** erhält. Was heißt eigentlich „aufgrund“ in diesem Zusammenhang genau? Oben wurde an die Intuition appelliert, in der Information über die Welt, die durch **T1** vermittelt wird, stecke T1-7 irgendwie schon mit drin. Wir können das nun genauer fassen: Es läßt sich zeigen, daß der Satz mit der Struktur

Wenn T1-1 und T1-2 und T1-5, dann T1-7

ein logisch wahrer Satz ist. Da dieser Satz zu allen Theorien hinzugefügt werden kann, ist in jeder Theorie, in der die Prämissen T1-1 und T1-2 und T1-5 wahr sind, auch die Schlußfolgerung T1-7 wahr. Daß dabei eine Vermittlung über die Zwischenglieder T1-6 und T1-8 erfolgt, spielt keine Rolle: Sind die Prämissen wahr, so die Zwischenglieder, sind die es, dann die Schlußfolgerung.

Haben wir also einmal logisch wahre Sätze mit einer „wenn–dann"-Struktur, kann man sie dazu benutzen, von einigen (nicht-logischen) Wahrheiten zu anderen Wahrheiten zu kommen. Dies kann man in Schlußregeln fassen. Im Beispiel ist zweimal die Regel

RQ Wenn ein Allsatz wahr in einer Theorie ist, so ist es auch seine Spezifizierung auf ein beliebiges Objekt

und einmal

RT Wenn eine Behauptung, daß keines einer Gesamtheit eine bestimmte Eigenschaft hat, wahr in einer Theorie ist, dann auch die daß alle dieser Gesamtheit die Eigenschaft nicht haben.

angewendet worden. Es ist nicht schwer zu erkennen, daß die oben umrissenen Mittel der Aussagenlogik, einer Theorie der Worte *und*, *oder*, *nicht* und anderer (vgl. TS1 und TS2 auf S. 2), nicht ausreicht, um die logische Wahrheit von RQ und RT zu zeigen. Für die erste haben wir nach Frege, Russell und Hilbert die klassische Prädikatenlogik, für die zweite ist bereits in der Antike und im Mittelalter die traditionelle Logik entwickelt und ausgebaut worden.

Zusammenfassung Ob man nun logische Wahrheit als Wahrheit in allen Modellen oder als Wahrheit aufgrund der logischen Form auffaßt, jedenfalls kann man logisch wahre Sätze zu beliebigen Theorien hinzufügen. Sie können eine bis dahin adäquate Theorie nicht falsch machen, sie sagen ja nichts – und damit auch nichts Falsches – über die Welt aus. Allerdings wird damit auch der Verdacht genährt, daß diese Sätze wohl nicht schaden, uns aber möglicherweise auch nicht viel helfen werden. Es sieht jedoch so aus, als ob sie uns als eine Art Fahrschein von Wahrheit zu Wahrheit dienen könnten.

3 Logische Korrektheit

Wenn logische Wahrheit nichts mit der außersprachlichen Welt, so wie sie ist, zu tun hat, wenn sie in beliebigen Theorien gilt und unter angemessenen Substitutionen bedeutungstragender Teile erhalten bleibt, dann kann man vielleicht auf den Wahrheitsbegriff ganz verzichten? Die Idee ist, einfach eine Menge von Regeln vorzugeben, mit denen man zu vorgegebenen Satzmengen andere Sätze hinzufügen kann. Eine Argumentation, ein Beweis in der natürlichen Sprache, ist damit eine Folge von Sätzen, wobei die ersten aus der vorgegebenen Theorie stammen und alle anderen nach vorgegebenen Regeln aus dem sprachlichen Material der schon vorhandenen gewonnen werden müssen:

A1-1	Kein Pferd hat Flügel	(wg.: Theoriebestandteil)
A1-2	Alle Schimmel sind Pferde	(wg.: Theoriebestandteil)
A1-3	Hansi ist ein Schimmel	(wg.: Theoriebestandteil)
A1-4	Hansi ist ein Pferd	(wg.: A1-2 und A1-3 und „Bei Allaussagen kann man den Allausdruck weglassen und den allquantifizierten Begriff durch einen passenden Namen ersetzen“)
A1-5	Alle Pferde sind ungeflügelt	(wg.: A1-1 und „Bei Kein-Hat-Aussagen verschiebe das Kein vor den zweiten Begriff und schreibe ein Alle vor den ersten“)
A1-6	Hansi ist ungeflügelt	(wg.: A1-4 und A1-5, vgl. Schritt A1-4)

Das neue an dieser Art von Betrachtung besteht darin, daß hier nicht mehr vordergründig über die Wahrheit der Aussagen argumentiert wird. Vorausgesetzt wird ein Satz an Regeln, die wie die Beispielregeln[3] mit Bezug auf die Form der Aussagen formuliert sind. Wenn die Sprache, in der die Regeln formuliert sind, und die Regeln selbst richtig konstruiert sind, kann man jede vorliegende Folge von Sätzen darauf hin überprüfen, ob zwischen ihnen ein regelgerechter Zusammenhang besteht oder nicht: Ob die Argumentation korrekt (bezüglich der Sprache

[3]Die Regel in A1-4 beschreibt den Übergang nicht ganz genau, es wird aber deutlich, welcher Art diese Regeln sind.

und der Regeln) ist oder nicht. Eine Folge wie die A1–Folge kann man eine Deduktion, einen Beweis der These T1-7 aus den Annahmen T1-1, T1-2 und T1-5 nennen. Für den philosophisch interessierten Betrachter von A1 stellen sich sofort die Fragen, warum eigentlich gerade *die* Regeln gelten sollen und welche es denn noch so gibt.

Für eine detaillierte Beantwortung der ersten Frage wird an dieser Stelle auf den zur Verfügung gestellten Text verwiesen[4]. Die Autoren haben sich große Mühe gegeben, ihn lesbar und unterhaltend zu gestalten.

Regeln der gesuchten Art werden mit schematischen Buchstaben, Variablen, für die bedeutungstragenden Einheiten formuliert, da sie schließlich für alle Ausdrücke einer bestimmten Form gelten sollen. Hier sind jeweils ein Beispiel für die Aussagenlogik, für die Prädikatenlogik und für die traditionelle Logik, wobei die Prämissen über dem Regelstrich stehen (der als „also“ gelesen werden kann) und die Schlußfolgerung darunter:

Aussagenlogik

$$\frac{A \vee B \qquad \sim A}{B}$$

Die Buchstaben stehen für beliebige Sätze, $\vee$ entspricht etwa dem „oder“ der natürlichen Sprache und $\sim$ dem „es ist nicht der Fall, daß“.

traditionelle Logik

$$\frac{\text{Kein } S \text{ ist } P}{\text{Alle } S \text{ sind } nicht - P}$$

Die Buchstaben stehen für beliebige generelle Individuenausdrücke.

Prädikatenlogik

$$\frac{\forall i A}{A[i/j]}$$

Das A steht für eine Aussage, in der ein genereller Begriff vorkommt, über den quantifiziert wird. Das i ist eine Variable für Individuen und drückt den generellen Begriff aus, j ein beliebiger Individuenausdruck (beispielsweise ein Name), der für i eingesetzt werden kann und $A[i/j]$ bezeichnet eine solche Einsetzung in A. Das Zeichen $\forall i$ wird „für alle der Art i“ gelesen.

Systeme dieser Regeln gibt es beispielsweise auch für die Logik der Modalitäten (notwendig; möglich), epistemischer Ausdrücke (weiß, daß; glaubt, daß) oder für die Logik von kausalen oder inhaltlichen wenn-dann-Ausdrücken. Arbeitet man in einer entsprechenden (aussagenlogischen, ..., kausallogischen) Spra-

[4]Neuhaus, F., Scheffler, U. und Shramko, Y.: *Wozu das alles?*, unveröffentlichtes Manuskript, zur Publikation eingereicht

che, dann ist ein Argument in der natürlichen Sprache genau dann gültig, wenn seine Übersetzung in die konstruierte Sprache zu einem korrekten Beweis wird. Das heißt, jeder Schritt im Argument entspricht der Anwendung einer akzeptierten Regel im formalen Beweis. Solche Schritte sind wir bei der Herleitung von T1-7 gegangen.

Garantieren gültige Argumente auch wahre Schlußfolgerungen? Die Frage ist wichtig, denn wie oben betont wurde, interessieren wir uns in der Wissenschaft für die Wahrheit. Die Antwort ist „nein“, ein gültiges Argument allein garantiert die Wahrheit der These, die bewiesen wurde, nicht. Wir können nicht wissen, ob Hansi üngeflügelt ist, sondern nur behaupten, daß *wenn* kein Pferd Flügel hat *und* alle Schimmel Pferde sind *und weiterhin* Hansi ein Schimmel ist, *dann* Hansi auch ungeflügelt ist. Dies ist logisch wahr. Ob Hansi tatsächlich ungeflügelt ist, hängt nicht nur von der Korrektheit des Beweises (A1) ab, sondern insbesondere auch von der Wahrheit der Prämissen. Zwei von diesen Prämissen haben faktischen Inhalt und so ist es zu allererst eine Frage der Tatsachen, ob Hansi ungeflügelt ist: Würde er beispielsweise ein Kanarienvogel oder ein Kater sein, wäre eine der Prämissen falsch, das Argument immer noch gültig aber die Schlußfolgerung falsch oder wahr – je nachdem. Logische Schlußregeln sind so konstruiert, daß sie die Wahrheit der Schlußfolgerung bei Wahrheit der Prämissen garantieren, mehr nicht.

Zusammenfassung In der Logik werden Systeme von Regeln benutzt, um einen Beweisbegriff bezüglich konstruierter Sprachen zu konstituieren. Argumente in der natürlichen Sprache sind gültig, wenn man in einer entsprechenden konstruierten Sprache einen korrekten Beweis führen kann, der dem Argument entspricht. Die wesentliche Forderung an den Begriff der Korrektheit ist die, daß Schlußregeln stets von wahren Sätzen zu wahren Sätzen führen sollen: Aus Wahrem kann man nichts Falsches ableiten.

4 Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit

Wenn man aber nun doch etwas Falsches ableiten kann? Vermutlich ist es längst aufgefallen, daß man mit Hilfe der bereits benutzten Regeln in der Theorie **T1** den Satz ableiten kann, daß Pegasus ungeflügelt ist. Nun ist die Negation dieses Satzes, daß Pegasus nämlich geflügelt ist, Satz in der Theorie und somit stehen wir vor der Situation, einen Satz und seine Negation in der Theorie akzeptiert zu haben. Die meisten Logiker – und Wissenschaftler überhaupt – teilen den „gewöhnliche(n) Horror, den das vorstellende, nicht spekulative Denken, [. . .] vor dem Widerspruche hat"[5]. Warum eigentlich? Der Widerspruch in **T1** ist nicht deswegen entstanden, weil die logischen Regeln von wahren Sätzen auf falsche führen können. Er ist entstanden, weil die Ausgangssatzmenge **T1** selbst implizit, latent, widersprüchlich ist; die Anwendung der logischen Regeln hat diese Widersprüchlichkeit nur zum Vorschein gebracht. Allein daß man zeigen kann, daß eine Theorie widersprüchlich ist, kann einen enormen Erkenntnisfortschritt darstellen. Warum ist es aber so fatal, einen Widerspruch in der Theorie zu haben?

Für die meisten logischen Ansätze ist es ausgemacht, daß eine Theorie, die widersprechende Sätze akzeptiert, jeden anderen Satz ebenfalls akzeptiert. Dies ist auch ganz vernünftig, denn wer behauptet, daß Pegasus geflügelt und ungeflügelt ist, hat kaum Gründe auszuschließen, daß Hansi ein Kater und Schimmel Rappen sind. Damit ist aber eine Einteilung der Sätze in wahre und nicht-wahre nicht mehr zu realisieren, alle erweisen sich als wahr und solch eine Theorie ist schlicht unbrauchbar. Aus der Sicht der Schlußregeln entspricht dem der Gedanke, daß aus zwei einander widersprechenden Sätzen auf einen beliebigen Satz geschlossen werden kann, auf der Argumentationsebene die Erkenntnis, daß mit jemandem, der unbeirrbar auf einem Widerspruch beharrt, keine rationale Kommunikation (über dieses Thema) mehr möglich ist. Logik ist allerdings einigermaßen flexibel, es gibt mittlerweile eine Reihe von Systemen von Schlußregeln, in denen Widersprüche sozusagen „lokal" behandelt werden: Man schließt nur aus dem nicht-widersprüchlichen Teil der Theorie, oder man erlaubt nicht, auf beliebige Sätze zu schließen, sondern nur auf kontrollierbar viele und mit dem Widerspruch zusammenhängende. Der Beweis von T1-7 oben ist beispielsweise völlig in Ordnung, da auf eine widerspruchsfreie Teilmenge der Ausgangssätze von **T1** als Prämissen zurückgegriffen wurde. Auch für solche Systeme gilt jedoch, daß die logischen Mittel nicht selbst noch Widersprüche in einer Theorie produzieren sollen.

Solche Gedanken haben in den zwanziger und dreißiger Jahren des vergangenen Jahrhunderts insbesondere im Rahmen der Mathematik die Frage aufkommen lassen, welche Eigenschaften logischer Systeme eigentlich als „gute" Eigenschaften zu qualifizieren wären. Eine Forderung an Systeme logischer Schlußregeln ist im Lichte des eben diskutierten ganz auf der Hand liegend und bereits genannt worden:

---

[5] Hegel, G.W.F.: *Wissenschaft der Logik II*, Akademie-Verlag, Berlin 1975, 61

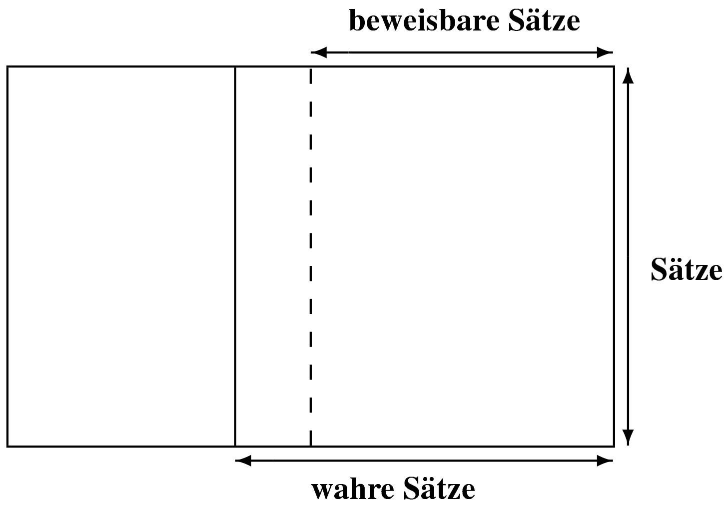
Kor Wenn man nach einer logischen Regel aus den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ auf einen Satz B schließen darf, so muß jede Theorie, die die Sätze $A_1, \ldots, A_n$ für gemeinsam wahr hält, auch B akzeptieren.

Für viele logische Systeme ist das gleichbedeutend zur Forderung:

Wid Jeder Satz, der ohne faktische Prämissen beweisbar ist, ist wahr.

Wie aus der Abbildung 3 zu erkennen ist, liegen die beweisbaren Sätze ganz in der Menge der wahren.

Abbildung 3: Widerspruchsfreiheit



Systeme mit dieser Eigenschaft sind insofern gut, als daß es zwar Wahrheiten gibt, die unbeweisbar bleiben (das sind die Sätze, die im schmalen Viereck mit einer gestrichelten und einer durchgezogenen Seite liegen), aber jedenfalls keine beweisbaren falschen. Für eine inhaltliche Theorie (über Pferde, Zahlen, Elementarteilchen oder Kardinaltugenden) heißt das, daß es eben außerhalb der vorhandenen Theorie noch etwas zu entdecken gibt, nicht alles kann erschlossen werden. In diesem Sinne ist die Theorie *unvollständig*.

Ist es sinnvoll, vollständige Theorien zu wünschen?

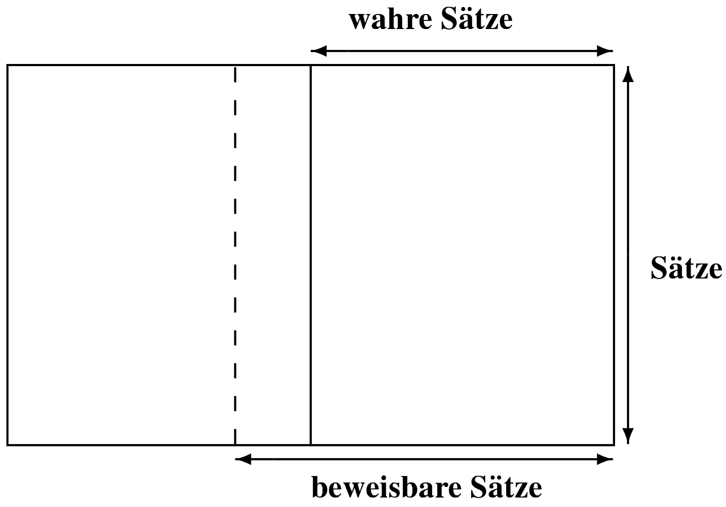
Vol Jeder wahre Satz ist in der Theorie beweisbar.

oder entsprechend

SVol Wenn jede Theorie, die $A_1, \ldots, A_n$ akzeptiert, auch B für wahr hält, dann soll man nach logischen Regeln aus $A_1, \ldots, A_n$ auf den Satz B schließen können

sind die entsprechenden Forderungen etwas genauer. Natürlich sind vollständige Theorien wünschenswert, im Idealfall haben wir mit einer solchen Theorie keinen Bedarf an empirischen Untersuchungen mehr. Alles was über den Gegenstandsbereich wahrheitsgemäß gesagt werden kann, kann allein durch Anwendung der Schlußregeln auf bereits bekannte und vorliegende Wahrheiten erschlossen werden, Leibniz' Idee von einer Universalsprache für die Wissenschaftler, die nicht mehr streiten sondern nur noch rechnen müßten, wäre verwirklicht. Betrachten wir die entsprechende Abbildung 4, so fällt auf, daß das kleine Gebiet zwischen der gestrichelten und der durchgezogenen Linie eine wesentlich unangenehmere Klasse von Sätzen bezeichnet.

Abbildung 4: Vollständigkeit



Diese Sätze sind beweisbar, aber nicht wahr – also falsche akzeptierte Sätze. Wie bereits oben argumentiert wurde, können wir solche Sätze auf gar keinen Fall (ohne weiteres) in unseren wissenschaftlichen Theorien dulden, weil entlang der beschriebenen „aus einem Widerspruch folgt alles"-Regel die gestrichelte Linie bis zum linken Rand verschoben werden kann: Alles ist beweisbar[6]. Vollständigkeit

[6]Manche sagen bildhaft: Das System *explodiert.*

ist also nicht erwünscht, wenn sie durch Widersprüchlichkeit erkauft wird.

Im Idealfall fallen für ein logisches System die gestrichelte und die durchgezogene Linie zusammen: Das System ist widerspruchsfrei und vollständig. Es gibt eine Reihe weiterer „guter" Eigenschaften für logische Systeme, die hier nicht weiter betrachtet werden. Ein großer Teil der Arbeit von Logikern besteht genau in der Untersuchung dieser sogenannter Metaeigenschaften, nach denen Systeme bewertet werden können.

Betrachtet man sich die beiden Abbildungen 3 und 4, so kann man sich die Frage stellen, ob man jedes Wissensgebiet, jede Menge von Wahrheiten mit einem passenden Beweisbarkeitsbegriff versehen kann. Dies ist, ein wenig verallgemeinert, die Frage nach dem Verhältnis von Wahrheit und Beweisbarkeit, von deren Beantwortung viele skeptische und antiskeptische Argumente, einige wichtige Diskussionen in der Philosophie des Geistes abhängen. Für die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik kann man die Frage bejahen:

> Jeder Satz ist genau dann (klassisch aussagen- bzw. prädikaten-) logisch wahr, wenn er im entsprechenden System ohne faktische Voraussetzungen beweisbar ist.

Hier fallen die beiden Linien zusammen. Der Beweis für diesen Satz stammt (in seinem „schwierigen" Teil) von Kurt Gödel, der in einer anderen Arbeit 1931[7] eine der wichtigsten und meist zitierten philosophischen Erkenntnisse bewiesen hat: Es gibt einen grundsätzlichen Unterschied zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit. Gödel hat gezeigt, daß man in einem formalen System, in dem zumindest die Grundrechenarten ausdrückbar sind (dazu reicht die Prädikatenlogik erster Stufe beispielsweise nicht aus)[8], über einen cleveren Trick Sätze sich auf sich selbst beziehen lassen kann. Solch ein Satz könnte dann etwa sagen „Dieser Satz hier enthält ein 'ein' ". Ein gewitzt konstruierter Satz, der *Gödelsatz*, behauptet nun die eigene Unbeweisbarkeit. Sei GS dieser Satz („Dieser Satz hier ist im System nicht beweisbar"), dann haben wir folgende Situation bezüglich des betrachteten formalen Systems:

---

[7] *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*

[8] Gödel betrachtet genauer die formale Arithmetik und zeigt mit Hilfe von Gödelisierung (einer bestimmten Abbildung von Termen und Sätzen auf Zahlen) und der Theorie der rekursiven Funktionen, daß man „die Formelfolge $X_1, \ldots, X_n$ ist in der formalen Arithmetik ein Beweis der Formel Y als berechenbares Prädikat erhält. Dies ist dann auch in der formalen Arithmetik ausdrückbar.

- Wenn GS beweisbar wäre, wäre er falsch. Damit wäre das System widersprüchlich.
- Wenn die Negation von GS beweisbar wäre, wäre der Satz beweisbar. Dann wäre aber beweisbar, daß er unbeweisbar ist und wir sind wieder auf der anderen Seite der Fallunterscheidung.

Es ist also so, daß weder der Satz noch seine Negation beweisbar sind, es gibt unentscheidbare Sätze in solchen Systemen. Weiterhin ist klar, daß wenn das System widerspruchsfrei ist, der Satz einfach wahr ist: Er behauptet ja schließlich richtigerweise nichts weiter, als seine eigene Unbeweisbarkeit. Das System ist unvollständig. Dieses Ergebnis „vererbt sich nach oben“: Jedes formale System, in dem man *mindestens* die Mittel wie Gödel oder äquivalente hat, erlaubt die Konstruktion von Gödelsätzen und daher gilt:

Goed Jedes widerspruchsfreie logische System, in dem man mindestens die Grundrechenarten ausdrücken kann, ist unvollständig.

Da Gödels Beweis ein mathematisches und philosophisches Resultat ist, daher nicht durch neue Entdeckungen oder Umdeutungen in Frage gestellt werden kann, setzt es eine prinzipielle Schranke für die Erkenntnis. Jede hinreichend interessante Theorie, kann man sagen, ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.

Zusammenfassung Das Verhältnis von logischer Wahrheit und Beweisbarkeit wird über die Begriffe *Widerspruchsfreiheit* und *Vollständigkeit* erfaßt. Viele bekannte logische Systeme sind widerspruchsfrei und vollständig, jedoch sind ausdrucksstarke Systeme widersprüchlich oder unvollständig. Grundvoraussetzung für das Arbeiten in logischen Systemen ist die Widerspruchsfreiheit.