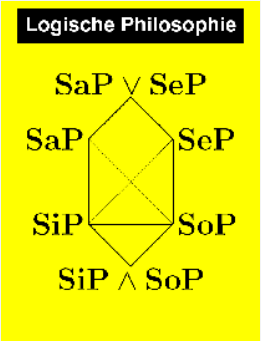
Axiomatischer Aufbau

Ein erstes System

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

April 2012



Eine Sprache — mengentheoretisch, Alphabet

IV	eine Menge von Zeichen (für Individuenvariablen)
IK	eine Menge von ... Individuenkonstanten
FK	eine Menge von ... funktionalen Konstanten
PK	eine Menge von ... Prädikatkonstanten
$\{), (\}$	eine Menge von ... Klammern
$\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$	eine Menge von ... logischen Konstanten
$\{\forall, \exists\}$	eine Menge von ... logischen Konstanten

Eine Sprache — mengentheoretisch, Terme

In der Menge der Terme sind die Individuenzeichen und Ausdrücke, die aus der passenden Anzahl von Termen und funktionalen Konstanten gebildet werden.

$$(1) \quad \tau \in T \quad =_{dfn} \quad \begin{cases} 1. & \tau \in IV \text{ oder } \tau \in IK, \text{ dann } \tau \in T \\ 2. & \tau_1, \ldots, \tau_n \in T \text{ und } \vartheta^n \in FK, \text{ dann} \\ & \vartheta^n(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T \end{cases}$$

Eine Sprache — mengentheoretisch, Aussagen

In der Menge der prädikatenlogischen Formeln sind die prädikativen Ausdrücke und Ausdrücke, die aus diesen mit den logischen Konstanten gebildet werden.

$$\phi \in PF \quad =_{dfn} \quad \phi = \pi^n(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$
$$\text{mit } \pi^n \in PK \text{ und } \tau_1, \ldots, \tau_n \in T$$

$$(2) \quad \phi \in PLF \quad =_{dfn} \quad \begin{cases} 1. & \phi \in PF, \text{ dann } \phi \in PLF \\ 2. & \phi_1 \in PLF \text{ und } \phi_2 \in PLF, \text{ dann} \\ & \sim\phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), \\ & (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2) \in PLF \\ 3. & \phi \in PLF \text{ und } \tau \in IV, \text{ dann} \\ & \forall\tau\phi, \exists\tau\phi \in PLF \end{cases}$$

Eine Theorie, mengentheoretisch

Theorie nennt man eine deduktiv abgeschlossene Satzmenge: Die Menge aller Aussagen, die die Axiome enthält und alle Formeln, die aus ihnen mit Regeln abgeleitet werden können.

Axiome
A1 $(\phi \to (\psi \to \phi))$
A2 $((\phi \to (\psi \to \varphi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \varphi)))$
A3 $((\sim\psi \to \sim\phi) \to ((\sim\psi \to \phi) \to \psi))$
A4 $(\forall\tau\phi \to \phi(\tau/\tau_1))$
(mit τ_1 ein Term, der frei ist für die Variable τ)
A5 $(\forall\tau(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall\tau\psi))$
(mit τ nicht frei in ϕ)

Regeln
R1 $(\phi \to \psi), \phi \vdash \psi$
R2 $\phi \vdash \forall\tau\phi$

Die Objektsprache

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV} &= \{x, y, z, x_1, \ldots\} \\
\mathrm{IK} &= \{a, b, c, a_1, \ldots\} \\
\mathrm{FK} &= \{f, g, h, f_1^1, \ldots\} \\
\mathrm{PK} &= \{P, Q, R, P_1^1, \ldots\} \\
\mathrm{AV} &= \{p, q, r, p_1, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Der Beweisbegriff

Beweis der Formel ϕ ist eine endliche Folge von Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$, von denen jede eine Instanz eines der Axiome ist oder nach den Regeln aus den vorhergehenden Gliedern der Folge gewonnen wurde und für die gilt: ψ_n ist ϕ.

Theorem ist eine Formel ϕ, für die es einen Beweis gibt ($\vdash \phi$).

Ein Beispielbeweis

1. $p \to ((q \to p) \to p) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$
2. $p \to ((q \to p) \to p)$
3. $(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$
4. $p \to (q \to p)$
5. $p \to p$

T1 $\vdash p \to p$

Ein Beweisschema

1. $\phi \to ((\psi \to \phi) \to \phi) \to ((\phi \to (\psi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$
2. $\phi \to ((\psi \to \phi) \to \phi)$
3. $(\phi \to (\psi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
4. $\phi \to (\psi \to \phi)$
5. $\phi \to \phi$

Beweis der Formel ϕ ist eine endliche Folge von Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n$, von denen jede eine Instanz eines der Axiome oder eines bereits bewiesenen Theoremschemas ist oder nach den Regeln aus den vorhergehenden Gliedern der Folge gewonnen wurde und für die gilt: ψ_n ist ϕ.

Definition der fehlenden logischen Konstanten

(3)
$$
\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &=_{dfn} \sim(\phi \rightarrow \sim\psi) \\
\phi \vee \psi &=_{dfn} \sim(\sim\phi \wedge \sim\psi) \\
\phi \leftrightarrow \psi &=_{dfn} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \\
\exists\tau\phi &=_{dfn} \sim\forall\tau\sim\phi
\end{aligned}
$$

Was ist eine aussagenlogische Konstante?

Aussagenlogische Konstanten verbinden Aussagen (Formeln) zu Aussagen (Formeln).

Aussagen sind wahrheitsfähige linguistische Entitäten.

Aussagenlogische Konstanten sind Funktionen von *n*-Tupeln von Wahrheitswerten in Wahrheitswerte.

ϕ	ψ	$\sim\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$

Funktionale Vollständigkeit

Funktional vollständig ist ein System von aussagenlogischen Operatoren genau dann, wenn sich mit ihrer Hilfe alle aussagenlogischen Funktionen ausdrücken lassen.

Satz

Das System $\sim, \wedge$ ist funktional vollständig.

Induktion über die Zahl der Argumente der Funktion:

1. Die Adjunktion läßt sich durch $\sim, \wedge$ darstellen.
2. Alle einstelligen aussagenlogischen Funktionen lassen sich durch $\sim, \wedge$ darstellen.
3. Annahme: Alle kleiner als $(n+1)$-stelligen Funktionen lassen sich durch $\sim, \wedge$ darstellen.
4. Dann lassen sich auch die $(n+1)$-stelligen Funktionen durch $\sim, \wedge$ darstellen.

Funktionale Vollständigkeit, 1 und 2

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\phi \vee \psi \quad =_{dfn} \quad \sim(\sim\phi \wedge \sim\psi)$$

ϕ	$F_1(\phi)$	$F_2(\phi)$	$F_3(\phi)$	$F_4(\phi)$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$

$$\begin{aligned} F_1 &=_{dfn} \phi \vee \sim\phi \\ F_2 &=_{dfn} \phi \\ F_3 &=_{dfn} \sim\phi \\ F_4 &=_{dfn} \phi \wedge \sim\phi \end{aligned}$$

Funktionale Vollständigkeit, 3 und 4

ϕ_1	ϕ_2	$\cdots$	ϕ_n	ϕ_{n+1}	F^{n+1}	F_1^n	F_2^n	$F_1^n \wedge \phi_{n+1} \vee F_2^n \wedge \sim\phi_{n+1}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$		$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	i_1	i_1	j_1	
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$		$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	i_2	i_2	j_2	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	i_k	i_k	j_k	$F_1^n \wedge \mathfrak{w} \vee F_2^n \wedge \mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	i_{2^n-1}	i_{2^n-1}	j_{2^n-1}	
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	i_{2^n}	i_{2^n}	j_{2^n}	
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$		$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	j_1	i_1	j_1	
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$		$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	j_2	i_2	j_2	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	j_k	i_k	j_k	$F_1^n \wedge \mathfrak{f} \vee F_2^n \wedge \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	j_{2^n-1}	i_{2^n-1}	j_{2^n-1}	
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	j_{2^n}	i_{2^n}	j_{2^n}	

Funktionale Vollständigkeit – wie klein geht's?

ϕ	ψ	$\phi\dagger\psi$	$\phi\vert\psi$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$

$$\sim\phi \quad =_{dfn} \quad \phi\dagger\psi$$
$$\phi \wedge \psi \quad =_{dfn} \quad \sim(\phi\dagger\psi)$$

$$\sim\phi \quad =_{dfn} \quad \phi\vert\psi$$
$$\phi \wedge \psi \quad =_{dfn} \quad \sim\phi\vert\sim\psi$$

Ableitungen

Ableitung einer Formel ϕ aus der endlichen Formelmenge $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ ($\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$) heißt eine endliche Folge von Formeln, von denen jede

1. ein Axiom, oder
2. ein Theorem, oder
3. eine der Annahmen $\psi_1, \ldots, \psi_n$, oder
4. aus vorhergehenden Zeilen nach den Schlußregeln gewonnen wurde, wobei keine Anwendung der Generalisierungsregel auf Variablen vorkommt, die frei in den Hypothesen vokommen;

und für die gilt: ϕ ist die letzte Formel der Folge.

Beispiel-Ableitungen

$p \to q, q \to r, p \vdash r$

1.	$p \to q$	Ann
2.	$q \to r$	Ann
3.	p	Ann
4.	q	1,3, MP
5.	r	2,4, MP

$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	Ann
2.	$\forall x P(x)$	Ann
3.	$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(x) \to Q(x))$	Ax
4.	$P(x) \to Q(x)$	1,3, MP
5.	$\forall x P(x) \to P(x)$	Ax
6.	$P(x)$	2,5, MP
7.	$Q(x)$	4,6, MP
8.	$\forall x Q(x)$	7, Gen

Das Deduktionstheorem

Satz

Wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$*, dann* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \vdash \psi_n \to \phi$*.*

Folge Wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$, dann
$\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi) \ldots)$

Zweck Vereinfachen von Beweisen: Ableiten anstelle von Beweisen

Beweis Induktion über die Länge der Ableitung (Anzahl der Zeilen)
Umbau der Ableitung $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ in die Ableitung $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \vdash \psi_n \to \phi$

1. Die Ableitung hat nur eine Zeile.
2. Wenn der Umbau bis zur n-ten Zeile gelungen ist, kann man diesen bis zur (n+1)-ten fortsetzen.

Deduktionstheorem, Schritt 1

Sei $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ die 1. Formelfolge

1.	ξ_1
$\vdots$	
n.	ξ_n
$n+1$.	ξ_{n+1}
$\vdots$	
m.	ξ_m

mit ξ_m ist ϕ. Man bildet zunächst die 2. Formelfolge, die **keine** Ableitung ist:

1.	$\psi_n \to \xi_1$
$\vdots$	
n.	$\psi_n \to \xi_n$
$n+1$.	$\psi_n \to \xi_{n+1}$
$\vdots$	
m.	$\psi_n \to \xi_m$

Allerdings steht in der letzten Zeile dieser Folge das geforderte letzte Glied der gesuchten Ableitung!

Induktionsanfang – $\psi_n \to \xi_1$:

- ξ_1 ist Axiom, Theorem

1.	ξ_1	Ax,The,Ann
2.	$\xi_1 \to (\psi_n \to \xi_1)$	Ax
3.	$\psi_n \to \xi_1$	MP

- ξ_1 ist $\psi_1 - \psi_{n-1}$
- ξ_1 ist ψ_n

1.	$\psi_n \to \xi_1$	The

Das ist $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1} \vdash \psi_n \to \phi$ bis zur 1. Zeile.

Deduktionstheorem, Schritt 2

Angenommen die zweite Formelfolge ist passend umgebaut bis Zeile n.

Zusätzlich zu den möglichen Rechtfertigungen aus dem Induktionsanfang kann ξ_{n+1} noch als Resultat der Anwendung von MP und Gen entstanden sein:

- ξ_{n+1} ist Axiom, Theorem
- ξ_{n+1} ist $\psi_1 - \psi_{n-1}$
- ξ_{n+1} ist ψ_n
- ξ_{n+1} ist aus vorhergehenden ξ_m und $\xi_m \to \xi_{n+1}$
- ξ_{n+1} ist $\forall\tau\xi$ aus vorhergehendem ξ, mit τ nicht frei in $\psi_1, \ldots, \psi_n$

Deduktionstheorem, Schritt 2 MP

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
 & \xi_m & \\
 & \vdots & \\
 & \xi_m \to \xi_{n+1} & \\
 & \vdots & \\
n+1 & \xi_{n+1} & \text{MP}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & \vdots \\
 & \psi_n \to \xi_m \\
 & \vdots \\
 & \psi_n \to (\xi_m \to \xi_{n+1}) \\
 & \vdots \\
n+1 & \psi_n \to \xi_{n+1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
 & \psi_n \to \xi_m & \\
 & \vdots & \\
 & \psi_n \to (\xi_m \to \xi_{n+1}) & \\
 & \vdots & \\
k & \psi_n \to (\xi_m \to \xi_{n+1}) \to ((\psi_n \to \xi_m) \to (\psi_n \to \xi_{n+1})) & \text{Ax} \\
k+1 & \psi_n \to \xi_{n+1} & 2 \times \text{MP}
\end{array}
$$

Deduktionstheorem, Schritt 2 Gen

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
 & \xi_m & \\
 & \vdots & \\
n+1 & \forall\tau\xi_m & \text{Gen}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & \vdots \\
 & \psi_n \to \xi_m \\
 & \vdots \\
n+1 & \psi_n \to \forall\tau\xi_m
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
 & \psi_n \to \xi_m & \\
 & \vdots & \\
k & \forall\tau(\psi_n \to \xi_m) \to (\psi_n \to \forall\tau\xi_m) & \text{Ax} \\
k+1 & \forall\tau(\psi_n \to \xi_m) & \text{Gen} \\
k+2 & \psi_n \to \forall\tau\xi_m & \text{MP}
\end{array}
$$

Der indirekte Beweis

Satz

Wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\phi \vdash \xi$
und $\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\phi \vdash \neg\xi$
dann $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$

1.	ψ_1	Ann
	$\vdots$	
n	ψ_n	Ann
	$\vdots$	
	$\neg\phi \to \xi$	DT
	$\neg\phi \to \neg\xi$	DT
	$\neg\phi \to \xi \to (\neg\phi \to \neg\xi \to \phi)$	Ax
	ϕ	$2 \times$ MP

Wie's geht, I

	$\vdash \neg\neg\phi \to \phi$	
denn	$\neg\neg\phi \to \phi$	
denn	es gibt ein ψ derart, daß	$\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \psi$
und		$\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\psi$

1.	$\neg\neg\phi$	Ann
2.	$\neg\phi$	inAn

$$\frac{\neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\phi \qquad \neg\neg\phi, \neg\phi \vdash \neg\neg\phi}{\neg\neg\phi \vdash \phi}$$

1.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	Ax
2.	$\neg\phi \to \neg\phi$	The
3.	$\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$	Ax
4.	$(\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$	MP
5.	$\neg\neg\phi$	Ann
6.	$\neg\phi \to \neg\neg\phi$	MP
7.	$\neg\phi \to \neg\phi$	MP
8.	$\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi \to \phi)$	Ax
9.	ϕ	MP

Wie's geht, II

1.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	Ax
2.	$\neg\phi \to \neg\phi$	The
3.	$\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$	Ax
4.	$(\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$	MP
5.	$\neg\neg\phi$	Ann
6.	$\neg\phi \to \neg\neg\phi$	MP
7.	$\neg\phi \to \neg\phi$	MP
8.	$\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi \to \phi)$	Ax
9.	ϕ	MP

1. $\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi))$
2. $\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)$
3. $\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)))$
4. $\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$
5. $\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi$
6. $\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$
7. $\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)$
8. $\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi \to \phi))$
9. $\neg\neg\phi \to \phi$

Wie's geht, III

1.		$(\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi))$	Ax
2.		$(\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)) \to (\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)))$	Ax
3.	1.	$\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi))$	MP
	2.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)$	
	3.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)))$	
	4.	$\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi))$	
k	5.	$\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi$	The
$k+1$		$(\neg\neg\phi \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi))) \to$	
		$\to ((\neg\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to (\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)))$	Ax
$k+2$	6.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	MP
	7.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi)$	
	8.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi \to \phi))$	
	9.	$\neg\neg\phi \to \phi$	