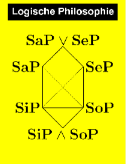
Semantik

Uwe Scheffler

[Technische Universität Dresden]

November 2013



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich $\mathrm{IK} \cup \mathrm{PK}$ und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Die Prädikatformeln

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n) \text{ genau dann, wenn } \langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n),$$

$$\text{wobei} \qquad \mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$$

- $\mathfrak{I}^*$ ist entweder eine Interpretation oder eine Belegung, je nach Argument
- Im Modell unter der Belegung ist $P(a)$ wahr, wenn die Interpretation von a in der von P ist.
  Im Modell unter der Belegung ist $P(x)$ wahr, wenn die Belegung von x in der von P ist.
- Im Modell unter der Belegung ist $Q(a, x)$ wahr, wenn das Paar aus der Interpretation von a und der Belegung von x in der Interpretation von Q ist.

Die Negationen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$.

Sei $\mathfrak{w} =$ - gültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$,
und $\mathfrak{f} =$ - ungültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$.

A	$\sim A$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}$$

„Anna mag Bodo nicht“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo“ dort ungültig ist.

Die Konjunktionen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \wedge B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}$$

„Anna mag Bodo und sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ und „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Adjunktionen (Disjunktionen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B$ genau dann,

wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \vee B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B}$$

„Anna mag Bodo oder sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Subjunktionen (Implikationen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B$ genau dann,

wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

A	B	$A \supset B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B}$$

„Wenn Anna Bodo mag, dann mag sie auch Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo nicht“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Bisubjunktionen (Implikationen in beiden Richtungen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B$ genau dann, wenn
$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$, oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models B$.

A	B	$A \equiv B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B}$$

„Wenn Anna Bodo genau dann mag, wenn sie auch Chris mag“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo und auch Chris“ oder aber „Anna mag Bodo nicht und auch Chris nicht“ auch dort gültig sind.

Die Allaussagen (generelle Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A$ genau dann,
wenn für alle i-Varianten $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Alles fließt ...

fließt

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

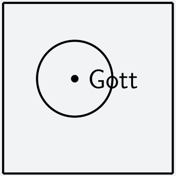
$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \text{ für beliebige } \mathfrak{M}, \mathfrak{V}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}$$

„Anna mag alle" ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag JEDEN" für eine beliebige Auswahl von JEDER auch dort gültig ist.

Die Existenzaussagen (partikuläre Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA$ genau dann, wenn
für mindestens eine i-Variante $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Es gibt einen Gott ...



$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A(j) \quad j - \mathrm{IK}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall iA}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

„Anna mag jemanden“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag EINEN“ für wenigstens eine Auswahl von EINER auch dort gültig ist.

Wahrheit

erfüllbar im Modell ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung gibt, unter der sie im Modell erfüllt (wahr) ist

wahr im Modell ist eine Formel genau dann, wenn sie unter jeder Belegung im Modell erfüllt (wahr) ist

erfüllbar ist eine Formel genau dann, wenn es eine Belegung und ein Modell so gibt, daß sie im Modell unter der Belegung erfüllt ist

allgemeingültig (logisch wahr, tautologisch) ist eine Formel, wenn sie wahr in jedem Modell unter jeder Belegung ist

unerfüllbar (logisch falsch, kontradiktorisch) ist eine Formel, die unter keiner Belegung in keinem Modell erfüllt ist

Wozu das alles taugt

Aufgabe Angenommen, es liegt ein (philosophisches) Argument in natürlicher Sprache mit den Prämissen $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\mathsf{n}$ und der Konklusion B vor. Zeige, daß es korrekt (nicht unbedingt gültig) ist.

Formalisieren Übersetze $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_\mathsf{n}$ und B in die Sprache der Prädikatenlogik: $A_1, \ldots, A_n$ und B. Bilde $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$.

Nachweis Kläre, ob $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ allgemeingültig ist:

- Allgemeingültigkeit ist nicht nachgewiesen worden. Dann könnten alle Voraussetzungen in einem Modell wahr sein, die Konklusion falsch (Regeln für $\wedge, \supset$.) Das Argument ist nicht korrekt, selbst bei wahren Prämissen und wahrer Konklusion.
- Allgemeinheit ist nachgewiesen. Dann kann bei wahren Prämissen die Konklusion nicht falsch werden. Das Argument ist korrekt und, bei wahren Prämissen, außerdem gültig.

Wahrheit – Beispiele

erfüllbar im Modell	$P(x) \wedge P(y)$	$\mathfrak{D} = \{e, f\}$ $\mathfrak{I}(P) = \{e\}$ $\mathfrak{V}(x) = \mathfrak{V}(y) = e$
wahr im Modell	$P(x) \wedge P(y)$	$\mathfrak{D} = \{e\}$ $\mathfrak{I}(P) = \{e\}$

erfüllbar jede der beiden bereits genannten Formeln

allgemeingültig $\forall x(P(x) \vee {\sim}P(x))$

unerfüllbar ${\sim}\forall x(P(x) \vee {\sim}P(x))$

Allgemeingültigkeit

Definition: Die Formel A ist genau dann allgemeingültig, wenn sie gültig in jedem Modell unter jeder Belegung ist.

$$\models A \quad =_{dfn} \quad \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \text{ für alle } \mathfrak{M} \text{ und } \mathfrak{V}$$

Problem: Wie zeigt man, daß etwas „für alle“ gilt?

- Durchmustern aller Fälle.
- Ableiten aus einem allgemeineren Gesetz.
- Indirekt beweisen.

Indirekter Beweis: Es ist zu zeigen, daß eine Behauptung A gilt. Nimm an, A gelte nicht. (**Zusätzliche Prämisse!**) Zeige, daß nun ein Widerspruch folgt. Damit ist die zusätzliche Prämisse absurd.
Also kann die zusätzliche Prämisse nicht wahr sein, muß die Annahme, daß A nicht gilt, falsch sein. Also muß A wahr sein.