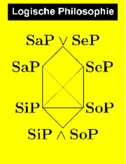
Semantik

Uwe Scheffler

[Technische Universität Dresden]

November 2013



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich $\mathsf{IK} \cup \mathsf{PK}$ und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Beispiel

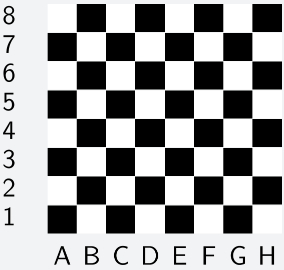
Eine konkrete Sprache:

IK: A1 – H8
PK: weiß, schwarz, ist neben, liegt horizontal zwischen, liegt vertikal zwischen, liegt diagonal zwischen

Prädikatenlogisch:

$a_1, a_2, \ldots, a_{64}, \ldots$
$P_1^1, P_2^1, Q_1^2, R_1^3, R_2^3, R_3^3, \ldots$

Ein konkretes Modell:



$\mathfrak{D}$ = die Menge der Felder.

$\mathfrak{I}$(A2) = das Feld erste Spalte, zweite Reihe

$\mathfrak{I}$(weiß) = die Menge der weißen Felder,
$\mathfrak{I}$(ist neben) = die Menge der Paare von Feldern, die nebeneinander liegen

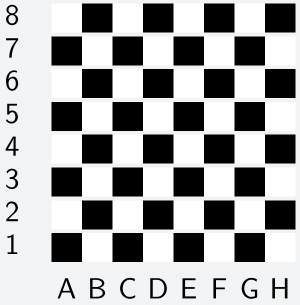
...

Formalisierung

Formalisieren:

A2, B3, C4	$\rightsquigarrow$	a_9, a_{18}, a_{27}
weiß	$\rightsquigarrow$	P_1
schwarz	$\rightsquigarrow$	P_2
neben	$\rightsquigarrow$	Q
h-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_1
v-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_2
d-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_3

Ein konkretes Modell:



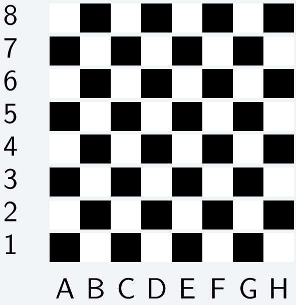
A2 ist weiß.	$P_1(a_9)$
B3 ist nicht schwarz.	$\sim P_2(a_{18})$
B3 ist nicht d-zwischen A2 und C4.	$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27})$
B3 hat Nachbarn.	$\exists x Q(x, a_{18})$
Alle Felder sind weiß.	$\forall x P_1(x)$

Wahrheitsbewertung

Interpretieren:

a_9, a_{18}, a_{27}	$\mathfrak{I}:$	A2, B3, C4
P_1	$\mathfrak{I}:$	Menge ...
P_2	$\mathfrak{I}:$	Menge ...
Q	$\mathfrak{I}:$	Paarmenge ...
R_3	$\mathfrak{I}:$	Tripelmenge ...

Ein konkretes Modell:



$$
\begin{array}{ll}
P_1(a_9) & \overset{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_9) \in \mathfrak{I}(P_1) \\
\sim P_2(a_{18}) & \overset{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_{18}) \notin \mathfrak{I}(P_2) \\
\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27}) & \overset{t}{\Leftrightarrow} \langle \mathfrak{I}(a_{18}), \mathfrak{I}(a_9), \mathfrak{I}(a_{27}) \rangle \notin \mathfrak{I}(R_3) \\
\exists x Q(x, a_{18}) & \overset{t}{\Leftrightarrow} \text{für einen Wert } \mathfrak{V}(x) : \langle \mathfrak{V}(x), \mathfrak{I}(a_{18}) \rangle \in \mathfrak{I}(Q) \\
\forall x P_1(x) & \overset{t}{\Leftrightarrow} \text{für alle Werte } \mathfrak{V}(x) : \mathfrak{V}(x) \in \mathfrak{I}(P_1)
\end{array}
$$

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Das Problem: Wie werden die quantifizierten Formeln und die mit freien Variablen bewertet?

- $\forall x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn jedes einzelne Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $\exists x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn irgendein Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $P(x)$ ist wahr im Modell wenn x irgendein Wert aus $\mathfrak{D}$ gegeben wurde und der in $\mathfrak{I}(P)$ ist.

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Die Lösung: Betrachte Funktionen, die den Variablen Werte aus $\mathfrak{D}$ zuschreiben: Variablenbelegungen $\mathfrak{V}$.

$\forall x P(x)$ Wenn alle Belegungen, die verschiedene Werte für x liefern, Werte aus $\mathfrak{I}(P)$ liefern, ist die Allaussage gültig im Modell (unter der Belegung).

$\exists x P(x)$ Wenn eine der Belegungen, die verschiedene Werte für x liefert, einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ liefert, ist die Existenzaussage gültig im Modell (unter der Belegung).

$P(x)$ Wenn die aktuelle Belegung einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ für x liefert, ist die offene Aussage gültig im Modell (unter der Belegung).

Variablenbelegungen

Variablen	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}^*$	$\mathfrak{B}^{**}$	$\mathfrak{B}_{x_2}$	$\mathfrak{B}_{x_n}$
x_1	A3	A1	A1	A3	A3
x_2	A5	A1	A5	A4	A5
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert
x_n	A5	A1	H6	A5	A3
x_{n+1}	C4	A1	H6	C4	C4
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert

$\mathfrak{B}_\mathbf{i}$-**Belegung** in einem Modell heißt eine Belegung, die sich von der Belegung $\mathfrak{B}$ höchstens im Wert für die Variable i unterscheidet.

[$\mathfrak{B}_i(j) = \mathfrak{B}(j)$ für alle verschiedenen Variablen i und j.]

Variablenbelegung

Variablenbelegung $\mathfrak{V}$ nennt man eine Funktion, die jeder Individuenvariablen i einen Wert $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$ zuschreibt.

i-Variante $\mathfrak{V}_i$ einer Belegung $\mathfrak{V}$ ist jede Belegung, die in allen Werten bis auf möglicherweise für i mit der Belegung $\mathfrak{V}$ übereinstimmt.

Beispiele

1. **Träger:** Menge der natürlichen Zahlen
   Interpretation:
   $\mathfrak{I}(a_1) = 1, \mathfrak{I}(b_1) = 2, \mathfrak{I}(c_1) = 3, \mathfrak{I}(a_2) = 4, \ldots$
   $\mathfrak{I}(P) = \{x : \text{PRIM}(x)\}$,
   $\mathfrak{I}(Q) = \{\langle x, y\rangle : \text{GRÖSSER}(x, y)\}, \ldots$
   Belegung: $\mathfrak{I}(x_1) = 1, \mathfrak{I}(y_1) = 1, \mathfrak{I}(z_1) = 1, \mathfrak{I}(x_2) = 1, \ldots$

2. **Träger:** Menge der Fahrzeuge, Fahrzeugteile
   Interpretation: $\mathfrak{I}(a_1) = \text{Audi}, \mathfrak{I}(b_1) = \text{Alfa}, \ldots$
   $\mathfrak{I}(P) = \{x : \text{KUNSTSTOFF}(x)\}$,
   $\mathfrak{I}(Q) = \{\langle x, y\rangle : \text{TEURER}(x, y)\}, \ldots$
   Belegung: $\mathfrak{I}(x_1) = \text{Sicherung 1}, \mathfrak{I}(y_1) = \text{Hecktür}, \ldots$

Modelle für die Prädikatenlogik

Sei $\mathfrak{D}$ eine nichtleere Menge, $\mathfrak{I}(i) \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}(f^n) \subset \mathfrak{D}^n$ und $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$.

Wir definieren $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$:
A ist wahr (erfüllt) in einem Modell unter einer Belegung

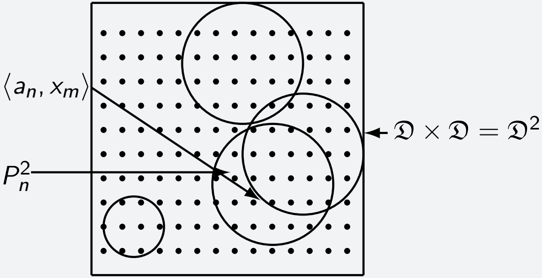
Schema:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ genau dann, wenn
[*eine Wahrheitsbedingung in Abhängigkeit von der Form von* A]

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ heißt: es ist nicht so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$

Die Prädikatformeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n)$,

wobei $\mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$



$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models P^2_n(a_n, x_m)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}(a_n), \mathfrak{V}(x_m) \rangle \in \mathfrak{I}(P^2_n)$

„Anna mag Bodo“ ist genau dann erfüllt (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn die, die mit „Anna“ bezeichnet wird, und der, der mit „Bodo“ bezeichnet wird, ein Paar sind, das in der mit „mögen“ bezeichneten Menge ist.

Die Prädikatformeln

$$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n) \text{ genau dann, wenn } \langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n),$$

$$\text{wobei} \qquad \mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$$

- $\mathfrak{I}^*$ ist entweder eine Interpretation oder eine Belegung, je nach Argument
- Im Modell unter der Belegung ist $P(a)$ wahr, wenn die Interpretation von a in der von P ist.
  Im Modell unter der Belegung ist $P(x)$ wahr, wenn die Belegung von x in der von P ist.
- Im Modell unter der Belegung ist $Q(a, x)$ wahr, wenn das Paar aus der Interpretation von a und der Belegung von x in der Interpretation von Q ist.

Die Negationen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$.

Sei $\mathfrak{w} =$ - gültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$,
und $\mathfrak{f} =$ - ungültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$.

A	$\sim A$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \sim\sim A}$$

„Anna mag Bodo nicht“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo“ dort ungültig ist.

Die Konjunktionen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \wedge B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}$$

„Anna mag Bodo und sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ und „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Adjunktionen (Disjunktionen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \vee B$ genau dann,

wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

A	B	$A \vee B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \vee B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \vee B}$$

„Anna mag Bodo oder sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Subjunktionen (Implikationen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \supset B$ genau dann,
wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \supset B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \supset B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \supset B}$$

„Wenn Anna Bodo mag, dann mag sie auch Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo nicht“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Bisubjunktionen (Implikationen in beiden Richtungen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B$ genau dann, wenn
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$, oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models B$.

A	B	$A \equiv B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

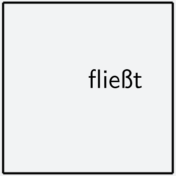
$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \equiv B}$$

„Wenn Anna Bodo genau dann mag, wenn sie auch Chris mag“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo und auch Chris“ oder aber „Anna mag Bodo nicht und auch Chris nicht“ auch dort gültig sind.

Die Allaussagen (generelle Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A$ genau dann,
wenn für alle i-Varianten $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Alles fließt ...



$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}$$

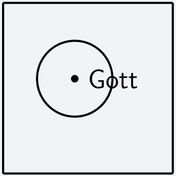
$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \text{ für beliebige } \mathfrak{M}, \mathfrak{V}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall i A}$$

„Anna mag alle“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag JEDEN“ für eine beliebige Auswahl von JEDER auch dort gültig ist.

Die Existenzaussagen (partikuläre Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA$ genau dann, wenn
für mindestens eine i-Variante $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Es gibt einen Gott ...



$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A(j) \quad j - \text{IK}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall iA}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

„Anna mag jemanden" ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag EINEN" für wenigstens eine Auswahl von EINER auch dort gültig ist.