

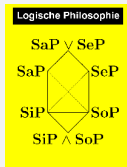
Formeln

Sprache, und Semantik zum ersten

Uwe Scheffler

[Technische Universität Dresden]

Oktober 2013



Die Formeldefinition – atomare Formeln

1. Wenn f^n eine n -stellige Prädikatenkonstante ist, und i_1, \dots, i_n sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \dots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (pIF)**.

$P^2(a, a_1)$ Formel Anna mag Bodo

$Q^1(x)$ Formel klug-sein

$Q^2(a_7, y)$ Formel der goldene Berg ist größer als ...

$P^2(P^1, a_3)$ Keine!

$f^1(x, j)$ Keine! (drei Fehler)

Die Formeldefinition – Aussagenlogik

3. Wenn A pF ist, ist $\sim A$ pF.

$R(x, a), \sim R(x, a), \sim\sim R(x, a), \dots$ – mit Anna verheiratet sein, nicht mit Anna verheiratet sein, nicht nicht mit Anna verheiratet sein, ...

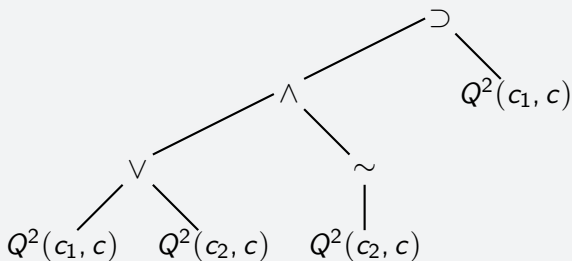
4. Wenn A und B pF sind, sind $(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$ pF.

$((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c)$

Wenn der Gärtner den Hauslehrer ermordet hat oder der Butler den Hauslehrer ermordet hat, und der Butler hat ihn nicht ermordet, dann hat ihn der Gärtner ermordet.

Zur Erholung – Malen nach Formeln

$$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$$



Die Formeldefinition – Quantoren

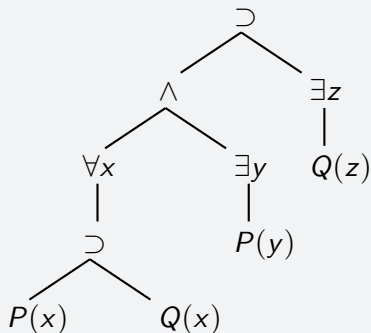
5. Wenn A eine pF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ pF.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$$

Wenn alles so ist, daß wenn es Grieche ist, es auch Mensch ist, und es Griechen gibt, dann gibt es auch Menschen.

Nochmal: Malen nach Formeln

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$$



Definitionen

Hauptoperator einer Formel ist der Operator, der bei der Bildung dieser Formel zuletzt angewendet wurde.

Teilformel einer Formel ist jeder Teil der Formel, der selbst Formel ist.

Aussagenlogisch ist eine Formel die keine Quantoren enthält.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$$

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$	$\exists z Q(z)$
$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y))$	$Q(z)$
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\sim \forall y \sim P(y)$
$(P(x) \supset Q(x))$	$\forall y \sim P(y)$
$P(x)$	$\sim P(y)$
$Q(x)$	$P(y)$

Definitionen

Wirkungsbereich des Quantors $\forall i / \exists i$ in einer (Teil-) Formel $\forall i A$
 $/ \exists i A$ ist die Formel A .

Gebunden heißen alle Vorkommen einer Individuenvariablen i die einem Quantor unmittelbar folgen oder im Wirkungsbereich eines gleichnamigen Quantors sind.

Frei heißen alle Vorkommen einer Individuenvariablen, die nicht gebunden sind.

Die Formeldefinition – das Ende

Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.

Die Formeldefinition der Prädikatenlogik

1. Wenn f^n eine n -stellige Prädikatenkonstante ist, und i_1, \dots, i_n sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \dots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).
2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (pIF)**.
3. Wenn A pIF ist, ist $\sim A$ pIF.
4. Wenn A und B pIF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ pIF.
5. Wenn A eine pIF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ pIF.
6. Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.

Vereinbarung über Klammersetzung

Ziel: Die Klammersetzung so vereinfachen (Klammern weglassen), daß die ursprüngliche Form eindeutig wiederhergestellt werden kann.

1. Außenklammern können weggelassen werden.

$((\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
 $((\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

1. Fehlende Außenklammern müssen restauriert werden.

Fortsetzung Klammersetzung

2. Klammern um linke benachbarte gleiche Operatoren können weggelassen werden.

$$((\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b) \quad \text{wird zu:}$$
$$(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$$

- 2.- Linke Klammern um benachbarte gleiche Operatoren müssen restauriert werden.

3. Klammern um bindungstärkere von zwei benachbarten unterschiedlichen Operatoren können weggelassen werden.
Bindungsstärke abnehmend: $\wedge \vee \supset \equiv$.

$$(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \wedge P(a)) \vee Q(b) \quad \text{wird zu:}$$
$$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \wedge P(a) \vee Q(b)$$

- 3.- Klammern um die bindungstärkeren zweier benachbarter Operatoren müssen restauriert werden.

Wozu Sprache?

- referierende** Termini (also Individuenkonstanten oder -variablen) werden verwendet, um auf Gegenstände (also Elemente einer Menge) zu verweisen
- prädikative** Termini (also Prädikatkonstanten) werden verwendet um auszudrücken, wie Gegenstände sind oder in welchem Verhältnis sie stehen (verweisen also auf Mengen von n-Tupeln von Elementen)
- Aussagen** sind komplex oder einfach, einfache schreiben Gegenständen Relationen zu (also behaupten, daß gewisse Tupel in gewissen Tupelmengen sind)
- Logik:** Zeige, welche Aussagen (Formeln) wahr sind unabhängig davon, welche Elemente in der Trägermenge drin sind und was die Zeichen von $\mathcal{L}_{\mathcal{P}\mathcal{L}^\infty}$ „bedeuten“!

Modelle

Ein Modell für eine Sprache \mathcal{L} (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich \mathfrak{D} ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation \mathfrak{I} ist eine Funktion, deren Argumentbereich $\{K \cup PK\}$ und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Beispiel

Eine konkrete Sprache:

IK: A1 – H8

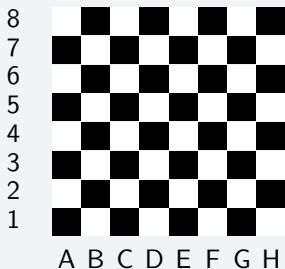
PK: weiß, schwarz, ist neben,
liegt horizontal zwischen, liegt
vertikal zwischen, liegt diago-
nal zwischen

Prädikatenlogisch:

$a_1, a_2, \dots, a_{64}, \dots$

$P_1^1, P_2^1, Q_1^2, R_1^3, R_2^3, R_3^3, \dots$

Ein konkretes Modell:



\mathfrak{D} = die Menge der Felder.

$\mathfrak{I}(A2)$ = das Feld erste Spalte,
zweite Reihe

$\mathfrak{I}(\text{weiß})$ = die Menge der weißen
Felder,

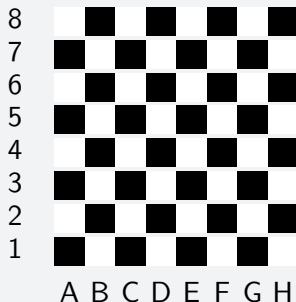
$\mathfrak{I}(\text{ist neben})$ = die Menge der
Paare von Feldern, die nebenein-
ander liegen

Formalisierung

Formalisieren:

A2, B3, C4	\rightsquigarrow	a_9, a_{18}, a_{27}
weiß	\rightsquigarrow	P_1
schwarz	\rightsquigarrow	P_2
neben	\rightsquigarrow	Q
h-zwischen	\rightsquigarrow	R_1
v-zwischen	\rightsquigarrow	R_2
d-zwischen	\rightsquigarrow	R_3

Ein konkretes Modell:



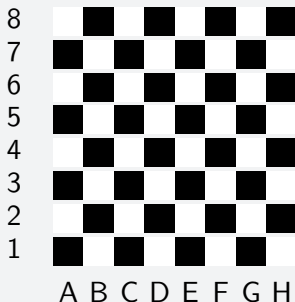
A2 ist weiß.	$P_1(a_9)$
B3 ist nicht schwarz.	$\sim P_2(a_{18})$
B3 ist nicht d-zwischen A2 und C4.	$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27})$
B3 hat Nachbarn.	$\exists x Q(x, a_{18})$
Alle Felder sind weiß.	$\forall x P_1(x)$

Wahrheitsbewertung

Interpretieren:

a_9, a_{18}, a_{27}	\mathfrak{I} :	A2, B3, C4
P_1	\mathfrak{I} :	Menge ...
P_2	\mathfrak{I} :	Menge ...
Q	\mathfrak{I} :	Paarmenge ...
R_3	\mathfrak{I} :	Tripelmenge ...

Ein konkretes Modell:



$P_1(a_9)$	$\stackrel{t}{\Leftrightarrow}$	$\mathfrak{I}(a_9) \in \mathfrak{I}(P_1)$
$\sim P_2(a_{18})$	$\stackrel{t}{\Leftrightarrow}$	$\mathfrak{I}(a_{18}) \notin \mathfrak{I}(P_2)$
$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27})$	$\stackrel{t}{\Leftrightarrow}$	$\langle \mathfrak{I}(a_{18}), \mathfrak{I}(a_9), \mathfrak{I}(a_{27}) \rangle \notin \mathfrak{I}(R_3)$
$\exists x Q(x, a_{18})$	$\stackrel{t}{\Leftrightarrow}$	für einen Wert $\mathfrak{V}(x) : \langle \mathfrak{V}(x), \mathfrak{I}(a_{18}) \rangle \in \mathfrak{I}(Q)$
$\forall x P_1(x)$	$\stackrel{t}{\Leftrightarrow}$	für alle Werte $\mathfrak{V}(x) : \mathfrak{V}(x) \in \mathfrak{I}(P_1)$

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Das Problem: Wie werden die quantifizierten Formeln und die mit freien Variablen bewertet?

- ▶ $\forall xP(x)$ ist wahr im Modell, wenn jedes einzelne Element aus \mathcal{D} in $\mathcal{I}(P)$ ist.
- ▶ $\exists xP(x)$ ist wahr im Modell, wenn irgendein Element aus \mathcal{D} in $\mathcal{I}(P)$ ist.
- ▶ $P(x)$ ist wahr im Modell wenn x irgendein Wert aus \mathcal{D} gegeben wurde und der in $\mathcal{I}(P)$ ist.

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Die Lösung: Betrachte Funktionen, die den Variablen Werte aus \mathfrak{D} zuschreiben: Variablenbelegungen \mathfrak{A} .

- $\forall x P(x)$ Wenn alle Belegungen, die verschiedene Werte für x liefern, Werte aus $\mathfrak{I}(P)$ liefern, ist die Allaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- $\exists x P(x)$ Wenn eine der Belegungen, die verschiedene Werte für x liefert, einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ liefert, ist die Existenzaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- $P(x)$ Wenn die aktuelle Belegung einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ für x liefert, ist die offene Aussage gültig im Modell (unter der Belegung).

Variablenbelegungen

Variablen	\mathfrak{V}	\mathfrak{V}^*	\mathfrak{V}^{**}	\mathfrak{V}_{x_2}	\mathfrak{V}_{x_n}
x_1	A3	A1	A1	A3	A3
x_2	A5	A1	A5	A4	A5
\vdots	...	A1	...	\mathfrak{V} -Wert	\mathfrak{V} -Wert
x_n	A5	A1	H6	A5	A3
x_{n+1}	C4	A1	H6	C4	C4
\vdots	...	A1	...	\mathfrak{V} -Wert	\mathfrak{V} -Wert

\mathfrak{V}_i -**Belegung** in einem Modell heißt eine Belegung, die sich von der Belegung \mathfrak{V} höchstens im Wert für die Variable i unterscheidet.

[$\mathfrak{V}_i(j) = \mathfrak{V}(j)$ für alle verschiedenen Variablen i und j .]

Modelle für die Prädikatenlogik

Sei \mathcal{D} eine nichtleere Menge, $\mathcal{I}(i) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}(f^n) \subset \mathcal{D}^n$ und $\mathcal{V}(i) \in \mathcal{D}$.

Wir definieren $\mathfrak{M}, \mathcal{V} \models A$:

A ist wahr (erfüllt) in einem Modell unter einer Belegung

Schema:

$\mathfrak{M}, \mathcal{V} \models A$ genau dann, wenn

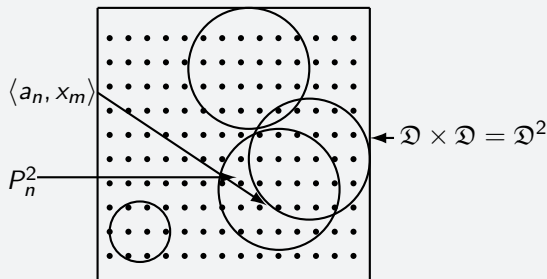
[eine Wahrheitsbedingung in Abhängigkeit von der Form von A]

$\mathfrak{M}, \mathcal{V} \not\models A$ heißt: es ist nicht so, daß $\mathfrak{M}, \mathcal{V} \models A$

Die Prädikatformeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models f^n(i_1, \dots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathcal{I}^*(i_1), \dots, \mathcal{I}^*(i_n) \rangle \in \mathcal{I}(f^n)$,

wobei
$$\mathcal{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathcal{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{B}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$$



$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models P_n^2(a_n, x_m)$ genau dann, wenn $\langle \mathcal{I}(a_n), \mathfrak{B}(x_m) \rangle \in \mathcal{I}(P_n^2)$

„Anna mag Bodo“ ist genau dann erfüllt (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn die, die mit „Anna“ bezeichnet wird, und der, der mit „Bodo“ bezeichnet wird, ein Paar sind, das in der mit „mögen“ bezeichneten Menge ist.