

Metasprache und Sprache

Womit und worüber wir reden
Prädikatenlogik

Uwe Scheffler

[Technische Universität Dresden]

Oktober 2013



Reste

Naive Mengenlehre haben wir drauf, hier noch ein Rest!

Operationen über Mengen

Schnittmenge N der Mengen K und L ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von K und L sind:

$N = K \cap L$ genau dann, wenn für alle e :

$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ und $e \in L$.

Vereinigungsmenge N der Mengen K und L ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von K oder L sind:

$N = K \cup L$ genau dann, wenn für alle e :

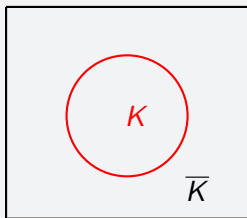
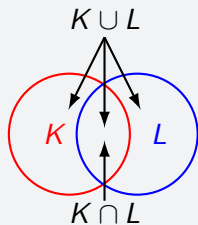
$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \in K$ oder $e \in L$.

Komplementärmenge N einer Menge K ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von K sind:

$N = \bar{K}$ genau dann, wenn für alle e :

$e \in N$ dann und nur dann, wenn $e \notin K$.

Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)



Theorien als sprachliche Objekte

Eine Theorie ist eine Menge von Sätzen.

- ▶ Soll alle wahren Sätze über das Gebiet enthalten.
- ▶ Soll keine falschen Sätze über das Gebiet enthalten.
- ▶ Soll hübsch, einfach, nachprüfbar . . . sein.

Beispiele:

- ▶ Arithmetik
- ▶ Newtonsche Mechanik
- ▶ Evolutionstheorie

Galilei: Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben und ihre Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ohne die es ganz unmöglich ist auch nur einen Satz zu verstehen, ohne die man sich in einem dunklen Labyrinth verliert.

Sprachen von Theorien – Objektsprachen

Die Sprache einer Theorie ist ein Zeichenvorrat mit Bildungsregeln für Termini und Sätze.

Beispiel Schulmathematik:

- ▶ $1, +, \leq, \int \dots$
- ▶ $i + k$ ist eine Zahl, wenn i und k Zahlen sind;
...
- ▶ $i \leq k$ ist eine Aussage, wenn i und k Zahlen sind ...

Aber, halt: Wo kommen auf einmal i, k her? Und sind „Zahl“ und „wenn“ mathematische Ausdrücke?

Metasprachen für Sprachen

Die Objektsprache dient zum Beschreiben eines Sachgebietes.

Die Metasprache einer (Objekt-) Sprache ist die Sprache, in der die Objektsprache (insbesondere ihr Aufbau, ihre Eigenschaften) beschrieben wird.

- ▶ eine natürliche Sprache und Bezeichnungen für Zahlen, mathematische Objekte und Ausdrücke wie „Beweis“ für die Sprache der Schulmathematik
- ▶ Mathematik und natürliche Sprache . . . für die Physik
- ▶ die Erstsprache für den Zweitsprachenerwerb
- ▶ eine natürliche Sprache und Mengentheorie für die Prädikatenlogik

Verwenden und Anführen

verwendet wird ein Ausdruck, wenn gemeint ist, was der Ausdruck bedeutet

angeführt wird ein Ausdruck, wenn er selbst gemeint ist

Beispiele

- ▶ Etwas, was kurz ist, ist kürzer als lange Dinge.
- ▶ „kurz“ ist genauso lang wie „lang“.
- ▶ Aus wie vielen Buchstaben besteht ein Buch?

Referenz und Prädikation

referierende Termini werden verwendet, um auf Gegenstände zu verweisen

prädikative Termini werden verwendet um auszudrücken, wie Gegenstände sind oder in welchem Verhältnis sie stehen

prädikative Aussagen (einfache Aussagen, atomare Aussagen) schreiben Gegenständen Eigenschaften oder Relationen zu

Beispiele

- ▶ Anna ist klug. Anna mag Bodo. Anna sitzt zwischen Bodo und Chris. Annas Mutter heißt Anna.
- ▶ $5 > 2^{10}$, $7 + 5 = 12$, „ $7 + 5 = 12$ “ kommt in Kants Kritik der reinen Vernunft vor.
- ▶ Anna und Bodo sind verheiratet.
- ▶ Anna mag Bodo nicht. Anna, Bodo. Bodo mögen.

Eine Wahrheitstheorie – die Intuition

Frage: Wann ist ein Satz „ [Gegenstand] ist ein [Eigenschaft]“ wahr?

Antwort: Wenn der betreffende Gegenstand die in Frage stehende Eigenschaft tatsächlich hat.



Anna, Bodo

Athen, die Freundschaft

...



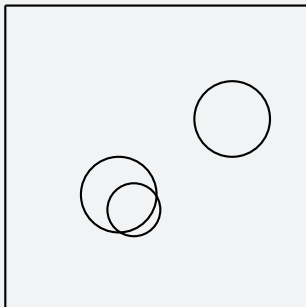
Eigenschaften und prädikative Sätze

②

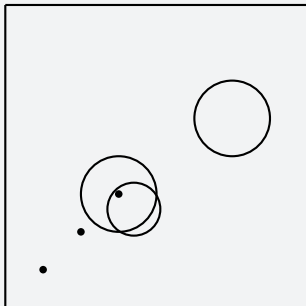
schön, klug

gerecht, gerade

...



②

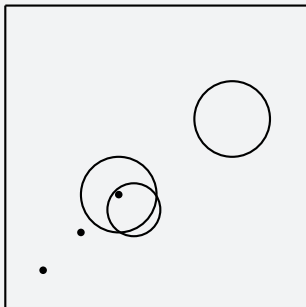


Mehrstellige Prädikationen

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D}$$

mag, trägt
 $\langle \text{Anna}, \text{Bodo} \rangle$

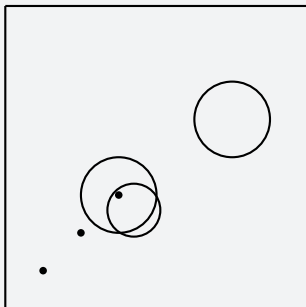
...



$$\mathcal{D}^n$$

n-stell. Relationen
 $\langle e_1, \dots, e_n \rangle, e_i \in \mathcal{D}$

...



Das Alphabet – nichtlogische Zeichen

Zeichen	Metazeichen	Verwendung	Beispiel
a, b, c, \dots a_1, b_1, c_1, \dots	$i, j, \dots, i_n \dots$	Individuen- konstanten	Anna, Ben, der zahme Löwe
x, y, z, \dots x_1, y_1, z_1, \dots	$i, j, \dots, i_n \dots$	Individuen- variablen	Gegenstand, welcher, jener
P, Q, R, \dots $P_1^1, Q_1^1, R_1^1, \dots$	f, f_n^m, g_n^m, \dots	Prädikat- konstanten	klug, liebt, gibt, Student

Das Alphabet – logische Zeichen

Zeichen	Name	vage Übersetzung
\sim	Negation	nicht, in-, un-
\wedge	Konjunktion	und, sowohl als auch
\vee	Adjunktion	oder
\supset	Subjunktion	wenn–dann
\equiv	Bisubjunktion	genau dann, wenn; dann und nur dann
\forall	Allquantor	für alle
\exists	Existenzquantor	für einige
$), ($	Klammern	Gruppierung

Die Formeldefinition – atomare Formeln

1. Wenn f^n eine n -stellige Prädikatenkonstante ist, und i_1, \dots, i_n sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \dots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (pIF)**.

$P^2(a, a_1)$ Formel Anna mag Bodo

$Q^1(x)$ Formel klug-sein

$Q^2(a_7, y)$ Formel der goldene Berg ist größer als ...

$P^2(P^1, a_3)$ Keine!

$f^1(x, j)$ Keine! (drei Fehler)

Die Formeldefinition – Aussagenlogik

3. Wenn A pIF ist, ist $\sim A$ pIF.

$R(x, a), \sim R(x, a), \sim\sim R(x, a), \dots$ – mit Anna verheiratet sein, nicht mit Anna verheiratet sein, nicht nicht mit Anna verheiratet sein, ...

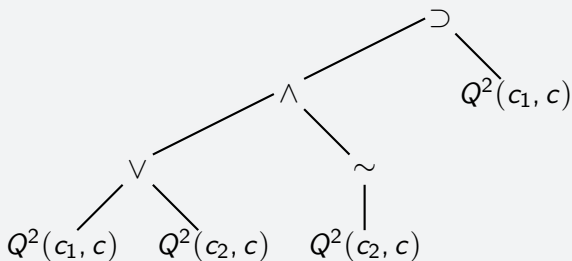
4. Wenn A und B pIF sind, sind $(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$ pIF.

$((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c)$

Wenn der Gärtner den Hauslehrer ermordet hat oder der Butler den Hauslehrer ermordet hat, und der Butler hat ihn nicht ermordet, dann hat ihn der Gärtner ermordet.

Zur Erholung – Malen nach Formeln

$$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$$



Die Formeldefinition – Quantoren

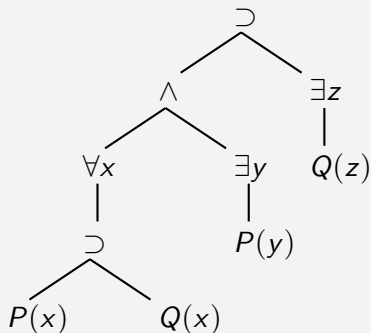
5. Wenn A eine pF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ pF.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$$

Wenn alles so ist, daß wenn es Grieche ist, es auch Mensch ist, und es Griechen gibt, dann gibt es auch Menschen.

Nochmal: Malen nach Formeln

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$$



Definitionen

Hauptoperator einer Formel ist der Operator, der bei der Bildung dieser Formel zuletzt angewendet wurde.

Teilformel einer Formel ist jeder Teil der Formel, der selbst Formel ist.

Aussagenlogisch ist eine Formel die keine Quantoren enthält.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$$

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$	$\exists z Q(z)$
$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim \forall y \sim P(y))$	$Q(z)$
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\sim \forall y \sim P(y)$
$(P(x) \supset Q(x))$	$\forall y \sim P(y)$
$P(x)$	$\sim P(y)$
$Q(x)$	$P(y)$

Die Formeldefinition – das Ende

Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.