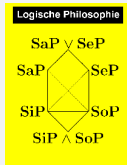


# Ein wenig Mengentheorie

Dr. Uwe Scheffler

[Technische Universität Dresden]

Oktober 2013



# Der Teufel!

Mein theurer Freund, ich rath' euch drum  
Zuerst Collegium Logicum.

Da wird der Geist euch wohl dressirt,  
In spanische Stiefeln eingeschnürt,  
Daß er bedächtiger so fortan  
Hinschleiche die Gedankenbahn,  
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,  
Irrlichtelire hin und her.

Dann lehret man euch manchen Tag,  
Daß, was ihr sonst auf einen Schlag  
Getrieben, wie Essen und Trinken frei,  
Eins! Zwei! Drei! dazu nöthig sei.

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$ .



# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$

# Mengen und Elemente

Menge nennt man jede als Ganzes gefaßte Vielheit von beliebigen (konkreten oder abstrakten) wohlunterschiedenen Gegenständen.

$\{e_1, \dots, e_n\}$  – die Menge aus  $e_1, e_2, \dots, e_n$

Element nennt man die zusammengefaßten Gegenstände.

$e_1 \in \{e_1, \dots, e_n\}$  – „ $e_1$  ist Element der Menge“

Mengenbildung geschieht über Aufzählung oder Eigenschaften.

die Menge der Zahlen 2, 3, 5, 7; die Menge der Berge Kilimandsharo und Mount Everest;

die Primzahlen unter 10; die Achttausender

Untermenge einer Menge  $K$  ist jede Menge, deren Elemente alle in  $K$  sind.

$L \subset K$  genau dann,

wenn für alle  $e \in L$  auch gilt  $e \in K$

# Besondere Mengen

Die leere Menge ist die Menge, die kein einziges Element enthält:  
für alle  $e$  gilt:  $e \notin \emptyset$

Die universale Menge ist die Menge, die alle Elemente enthält:  
für alle  $e$  gilt:  $e \in \mathcal{U}$

Identisch sind zwei Mengen genau dann, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen:

$M_1 = M_2$  genau dann, wenn für alle  $e$  gilt:  $e \in M_1$   
genau dann, wenn  $e \in M_2$

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen  $K$  und  $L$  wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus  $K$  und deren zweites aus  $L$  ist.

$$K \times L = \{ \langle d, e \rangle : d \in K \text{ und } e \in L \}$$

$$\begin{aligned} \{ \text{Anna, Bodo} \} \times \text{Kants Kritiken} &= \\ \{ \langle \text{Anna, KdrV} \rangle, \langle \text{Anna, KdpV} \rangle, \langle \text{Anna, KdU} \rangle, \\ \langle \text{Bodo, KdrV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdpV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdU} \rangle \} \end{aligned}$$

n-faches kartesisches Produkt :

$$\begin{aligned} K_1 \times \dots \times K_n &= \\ \{ \langle e_1, \dots, e_n \rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \dots \text{ und } e_n \in K_n \} \\ (\text{Menge aller n-Tupel } \dots) \end{aligned}$$

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen  $K$  und  $L$  wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus  $K$  und deren zweites aus  $L$  ist.

$$K \times L = \{ \langle d, e \rangle : d \in K \text{ und } e \in L \}$$

$$\begin{aligned} &\{ \text{Anna, Bodo} \} \times \text{Kants Kritiken} = \\ &\{ \langle \text{Anna, KdrV} \rangle, \langle \text{Anna, KdpV} \rangle, \langle \text{Anna, KdU} \rangle \\ &\langle \text{Bodo, KdrV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdpV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdU} \rangle \} \end{aligned}$$

n-faches kartesisches Produkt :

$$\begin{aligned} &K_1 \times \dots \times K_n = \\ &\{ \langle e_1, \dots, e_n \rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \dots \text{ und } e_n \in K_n \} \\ &(\text{Menge aller n-Tupel } \dots) \end{aligned}$$

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen  $K$  und  $L$  wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus  $K$  und deren zweites aus  $L$  ist.

$$K \times L = \{ \langle d, e \rangle : d \in K \text{ und } e \in L \}$$

$$\begin{aligned} \{ \text{Anna, Bodo} \} \times \text{Kants Kritiken} = \\ \{ \langle \text{Anna, KdrV} \rangle, \langle \text{Anna, KdpV} \rangle, \langle \text{Anna, KdU} \rangle \\ \langle \text{Bodo, KdrV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdpV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdU} \rangle \} \end{aligned}$$

n-faches kartesisches Produkt :

$$\begin{aligned} K_1 \times \dots \times K_n = \\ \{ \langle e_1, \dots, e_n \rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \dots \text{ und } e_n \in K_n \} \\ (\text{Menge aller n-Tupel } \dots) \end{aligned}$$

# Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt zweier Mengen  $K$  und  $L$  wird die Menge aller geordneten Paare genannt, deren erstes Element aus  $K$  und deren zweites aus  $L$  ist.

$$K \times L = \{ \langle d, e \rangle : d \in K \text{ und } e \in L \}$$

$$\begin{aligned} \{ \text{Anna, Bodo} \} \times \text{Kants Kritiken} = \\ \{ \langle \text{Anna, KdrV} \rangle, \langle \text{Anna, KdpV} \rangle, \langle \text{Anna, KdU} \rangle \\ \langle \text{Bodo, KdrV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdpV} \rangle, \langle \text{Bodo, KdU} \rangle \} \end{aligned}$$

n-faches kartesisches Produkt :

$$\begin{aligned} K_1 \times \dots \times K_n = \\ \{ \langle e_1, \dots, e_n \rangle : e_1 \in K_1 \text{ und } \dots \text{ und } e_n \in K_n \} \\ (\text{Menge aller n-Tupel } \dots) \end{aligned}$$

# Funktionen

Funktion heißt jede Abbildung von einer Menge  $K$  in eine Menge  $L$ , die jedes Element von  $K$  auf genau ein Element von  $L$  abbildet.

Sei  $T = \{w, f\}$  – die Menge der Wahrheitswerte,  $K$  – die Menge der Studenten der TU und  $L$  – die Menge der Zahlen. Dann sind  
`kg: koerpergroesse in cm` und `mn: matrikelnummer`  
Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

`kg(Anna)=175; kg(Bodo)=175; ...`

`mn(Anna)=675665; mn(Bodo)=348776; ...`

`vh: verheiratet`

eine Funktion von Studenten  $\times$  Studenten in Wahrheitswerte:

`vh(<Anna,Bodo>)=f; vh(<Anna,Anna>)=f;`

`vh(<Chris,Dani>)=w; vh(<Dani,Chris>)=w`



# Funktionen

Funktion heißt jede Abbildung von einer Menge  $K$  in eine Menge  $L$ , die jedes Element von  $K$  auf genau ein Element von  $L$  abbildet.

Sei  $T = \{w, f\}$  – die Menge der Wahrheitswerte,  $K$  – die Menge der Studenten der TU und  $L$  – die Menge der Zahlen. Dann sind  
 $kg$ : koerpergroesse in cm      und       $mn$ : matrikelnummer  
Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

$kg(\text{Anna})=175$ ;  $kg(\text{Bodo})=175$ ; ...

$mn(\text{Anna})=675665$ ;  $mn(\text{Bodo})=348776$ ; ...

$vh$ : verheiratet

eine Funktion von Studenten  $\times$  Studenten in Wahrheitswerte:

$vh(\langle \text{Anna}, \text{Bodo} \rangle)=f$ ;  $vh(\langle \text{Anna}, \text{Anna} \rangle)=f$ ;

$vh(\langle \text{Chris}, \text{Dani} \rangle)=w$ ;  $vh(\langle \text{Dani}, \text{Chris} \rangle)=w$

# Funktionen

Funktion heißt jede Abbildung von einer Menge  $K$  in eine Menge  $L$ , die jedes Element von  $K$  auf genau ein Element von  $L$  abbildet.

Sei  $T = \{w, f\}$  – die Menge der Wahrheitswerte,  $K$  – die Menge der Studenten der TU und  $L$  – die Menge der Zahlen. Dann sind  
 $kg$ : koerpergroesse in cm      und       $mn$ : matrikelnummer  
Funktionen von den Studenten in die Zahlen:

$kg(\text{Anna})=175$ ;  $kg(\text{Bodo})=175$ ; ...

$mn(\text{Anna})=675665$ ;  $mn(\text{Bodo})=348776$ ; ...

$vh$ : verheiratet

eine Funktion von Studenten  $\times$  Studenten in Wahrheitswerte:

$vh(\langle \text{Anna}, \text{Bodo} \rangle)=f$ ;  $vh(\langle \text{Anna}, \text{Anna} \rangle)=f$ ;

$vh(\langle \text{Chris}, \text{Dani} \rangle)=w$ ;  $vh(\langle \text{Dani}, \text{Chris} \rangle)=w$

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

Verheiratet  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort  
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen  
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug  $\subset$  Lebewesen  
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

**Verheiratet**  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort

Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand

Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen

(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug  $\subset$  Lebewesen

Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

Verheiratet  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort  
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen  
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug  $\subset$  Lebewesen  
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

Verheiratet  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort  
Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  
Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen  
(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug  $\subset$  Lebewesen  
Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

Verheiratet  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort

Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand

Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen

(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

Klug  $\subset$  Lebewesen

Menge der Lebewesen, die klug sind

# Relationen

n-stellige Relation heißt jede Untermenge eines kartesisches  
Produktes  $K_1 \times \dots \times K_n$ .

Verheiratet  $\subset$  Menschen  $\times$  Menschen  
(Paare von Menschen, die miteinander verheiratet sind)

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Ort  $\times$  Ort  $\times$  Ort

Tripel von Orten, deren erster zwischen den anderen liegt

Liegt\_Zwischen  $\subset$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand  $\times$  Gegenstand

Tripel von Gegenständen, deren erster zwischen den anderen liegt

Verursacht  $\subset$  Agenten  $\times$  Handlungen

(Paare von Menschen und Taten, die sie ausführen)

**Klug**  $\subset$  Lebewesen

Menge der Lebewesen, die klug sind



# Operationen über Mengen

Schnittmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  und  $L$  sind:

$N = K \cap L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  und  $e \in L$ .

Vereinigungsmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  oder  $L$  sind:

$N = K \cup L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  oder  $e \in L$ .

Komplementärmenge  $N$  einer Menge  $K$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von  $K$  sind:

$N = \bar{K}$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \notin K$ .

# Operationen über Mengen

Schnittmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  und  $L$  sind:

$N = K \cap L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  und  $e \in L$ .

Vereinigungsmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  oder  $L$  sind:

$N = K \cup L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  oder  $e \in L$ .

Komplementärmenge  $N$  einer Menge  $K$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von  $K$  sind:

$N = \bar{K}$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \notin K$ .

# Operationen über Mengen

Schnittmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  und  $L$  sind:

$N = K \cap L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  und  $e \in L$ .

Vereinigungsmenge  $N$  der Mengen  $K$  und  $L$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die Element von  $K$  oder  $L$  sind:

$N = K \cup L$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

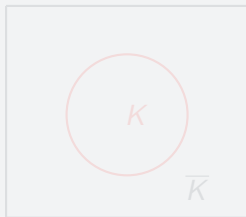
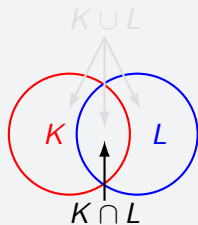
$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \in K$  oder  $e \in L$ .

Komplementärmenge  $N$  einer Menge  $K$  ist die Menge, die nur die Elemente enthält, die nicht Element von  $K$  sind:

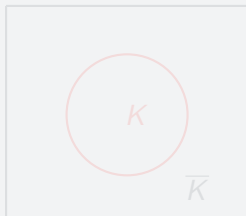
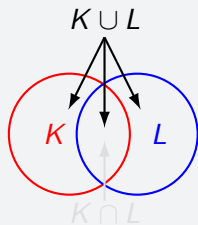
$N = \bar{K}$  genau dann, wenn für alle  $e$ :

$e \in N$  dann und nur dann, wenn  $e \notin K$ .

# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)



# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)



# Bilder zu den Operationen (Eulersche Kreise)

