Nichtklassische Logiken

Ein Überblick

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Janauar 2013

Traditionelle Logik, Klassische Logik I

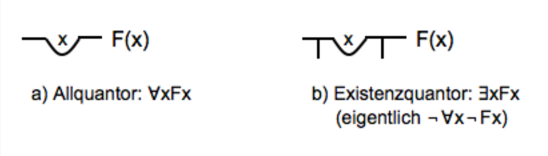
Traditionelle Logik

- Aristoteles: Schlüsse im logischen Quadrat, Syllogismen
- Schlüsse erhalten die Wahrheit, zwei Wahrheitswerte und eine Korrespondenztheorie (im Wesentlichen), nicht alle Aussagen sind wahr oder falsch
- Beispiel: Kants *Jäsche-Logik*, sprachphilosophisch, erkenntnistheoretisch
  Begriff, Urteil, Schluß
- „Allgemein bejahende Urteile lassen sich nur per accidens umkehren; — denn das Prädikat in diesen Urteilen ist ein weiterer Begriff und es ist also nur einiges von demselben in dem Begriffe des Subjekts enthalten."

Traditionelle Logik, Klassische Logik II

Klassische Logik

- Frege, Russell, Hilbert, Gödel, Tarski, Gentzen
- Formale Sprachen, Axiomatische Systeme, Regellogische Systeme, Semantik
- Beispiel: Freges Begriffsschrift



- Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität: korrekt und vollständig

Mehrwertige (Aussagen-) Logik

Wahrheitswerte werden Aussagenvariablen zugeschrieben, einige sind „ausgezeichnet“:
$\mathfrak{W} = \{$**wahr**$,\ \mathfrak{f}$alsch$, \mathfrak{u}$nbestimmt$\}$
$\mathfrak{W}' = \{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathfrak{f}, \mathfrak{n}\}$

Operatoren sind Wahrheitsfunktionen, **allgeneingültig** sind Formeln, die nur ausgezeichnete Wahrheitswerte annehmen

Beispiel unbestimmt:

	$\sim$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$\wedge$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$\vee$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$

Für $[A] = \mathfrak{u}$ gilt: $[\sim(A \wedge \sim A)] = [A \vee \sim A] = \mathfrak{u}$!

Historie Łukasiewicz, Post, Kleene

Modallogik – worum geht es?

alethisch notwendig, möglich, unmöglich ...

- Es ist notwendig, daß $2 \times 2 = 4$.
- Möglicherweise kommt Anna zu spät.
- Wenn es notwendig ist, daß es bei Regen naß wird und es möglicherweise regnet, dann ist es möglich daß es naß wird.

epistemisch wissen, glauben, bezweifeln, beweisbar ...

- Wissen ist wahrer gerechtfertigter Glaube.
- Alle logischen Folgen aus Wissen sind selbst wieder Wissen.
- Anna weiß, daß $5 + 7 = 12$.

deontisch geboten, verboten, erlaubt

- Nur erlaubtes kann geboten werden.
- Wenn erlaubt ist, zu bleiben oder zu gehen, dann ist es sowohl erlaubt zu bleiben, als auch erlaubt zu gehen.
- Wenn man zu alternativen Handlungen verpflichtet ist, ist es erlaubt, sich eine auszusuchen.

Alethische Modallogik

Sprache Aussagenlogik + $\Box$ (es ist notwendig, daß . . .)
+ $\Diamond A \;=_{dfn}\; {\sim}\Box{\sim}A$ (möglich heißt, es ist nicht notwendigerweise nicht so)

Namen Lewis, Carnap, Kripke

Axiome Aussagenlogik +
$\Box A \supset A$
$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

Regeln Aussagenlogik +
Wenn $\vdash A$, dann $\vdash \Box A$

Was noch? Wichtige Kandidaten:
$\Box A \supset \Box\Box A$
$\Diamond\Box A \supset A \qquad (\approx \quad A \supset \Box\Diamond A)$

Hegel und Die Wissenschaft der (modalen) Logik

1. *Was wirklich ist, ist möglich.*
2. *Weil er* (der Inhalt) *. . . ein möglicher ist, ist ebensosehr ein anderer und sein Gegenteil möglich.*
   Die Möglichkeit . . . enthält es in ihrer Bestimmung . . . daß auch das Gegenteil möglich sei.
3. *Das Notwendige ist ein Wirkliches*
4. Wenn etwas notwendig ist, ist es möglich. (3,1)
5. Wenn etwas notwendig ist, ist sein Gegenteil möglich. (4,2)

Es war notwendig, daß Sokrates sterben mußte, aber er könnte noch leben.

Vermutlich hat Hegel auf drei Seiten zwei verschiedene Konzeptionen der Modalität verwendet!

Aristoteles’ Lehre vom Satz (12, 13)

Modalitäten vermögend zu sein, unvermögend zu sein, kontingent zu sein, notwendig zu sein

Abfolge von Sätzen *was notwendig ist, ist vermögend zu sein, Nun folgt aber auf vermögend zu sein auch nicht: notwendig seiend, und ebensowenig: notwendig nicht seiend*

Łukasiewicz' mehrwertige Modallogik

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\supset$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

	$\sim$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

	$\Box$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	0

	$\Diamond$
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Lewis' Strikte Implikation

$p \wedge q \prec q \wedge p$
$p \wedge q \prec p$
$p \prec p \wedge p$
$(p \wedge q) \wedge r \prec p \wedge (q \wedge r)$
$p \prec \sim\sim p$
$\sim\sim p \prec p$

$(p \prec q) \wedge (q \prec r) \prec (p \prec r)$
$p \wedge (p \prec q) \prec q$
$(p \prec q) \prec (\sim q \prec \sim p)$
$(p \wedge q \prec r) \prec (p \wedge \sim r \prec \sim q)$
$(p \prec q \wedge r) \prec (p \prec q)$

Einsetzungsregel, Abtrennungsregel, Ersetzbarkeitsregel und
$A, B / A \wedge B$

$$A \prec B \quad =_{dfn} \quad \Box(A \supset B)$$

Epistemische (und doxastische) Logik

Namen Hintikka, Lenzen, Gärdenfors

Sprache Aussagenlogik + K (Wissen) und/oder B (Glauben, Überzeugung) + (immer öfter) Namen für Agenten

Axiome (Wissen) Aussagenlogik +
$KA \supset A$ Faktivität
$K(A \supset B) \supset (KA \supset KB)$ Abschluß

Regeln Aussagenlogik +
Wenn $\vdash A$, dann $\vdash KA$.

Was noch? ganz viel ... (und auch Belief Revision)

Platons Menon

Wissen ist:

1. wahre
2. gerechtfertigte
3. Meinung.

Logische Prinzipien entsprechend

1. $KA \models A$ – Faktivität
2. $A \supset B, KA \models KB$ – Abschluß
3. $KA \models BA$ – Brücke zur doxastischen Logik

Gettier – Die Formulierung

Suppose that Smith and Jones have applied for a certain job. And suppose that Smith has strong evidence for the following conjunctive proposition:
d. Jones is the man who will get the job, and Jones has ten coins in his pocket.
(. . .) Proposition (d) entails:
e. The man who will get the job has ten coins in his pocket.
Let us suppose that Smith sees the entailment from (d) to (e), and accepts (e) on the grounds of (d), for which he has strong evidence. In this case, Smith is clearly justified in believing that (e) is true. But imagine, further, that unknown to Smith, he himself, not Jones, will get the job. And, also, unknown to Smith, he himself has ten coins in his pocket. Proposition (e) is then true, though proposition (d), from which Smith inferred (e), is false.

Modale Wahrheit

notwendig wahr ist, was wahr in allen möglichen Welten ist

möglich wahr ist, was wahr in einer möglichen Welt ist

Mögliche Welten

M-Modellstruktur: Tripel $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{K}, \mathfrak{R} \rangle$ mit –

$\mathfrak{K}$ – nichtleere Menge; (mögliche Welten)

$\mathfrak{G} \in \mathfrak{K}$; (aktuale Welt)

$\mathfrak{R}$ ist eine reflexive Relation auf $\mathfrak{K}$. (Erreichbarkeit)

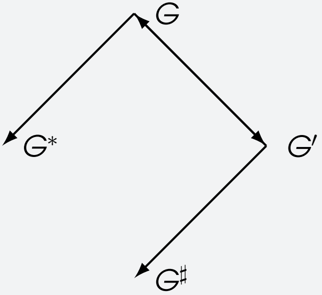
S4-Modellstruktur: $\mathfrak{R}$ – transitiv;
B-Modellstruktur: $\mathfrak{R}$ – symmetrisch;
S5-Modellstruktur: $\mathfrak{R}$ – Äquivalenzrelation.

Modell: Funktion $\Phi(AV \times \mathfrak{K}) \dashrightarrow \{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ mit –

$\mathfrak{K}$ – Trägermenge einer Modellstruktur;

AV – Aussagenvariablen.

Ein Beispielmodell



Aussagenvariablen: p, q

$$\Phi(p, G) = \Phi(p, G^*) \\ = \Phi(p, G') = \Phi(p, G^\sharp) = \mathfrak{w}$$

$$\Phi(q, G) = \Phi(q, G^*) \\ = \Phi(q, G^\sharp) = \mathfrak{f}$$

$$\Phi(q, G') = \mathfrak{w}$$

$\Box p$ ist M-gültig, S4-gültig, S5-gültig
$\Diamond q$ ist M-ungültig, S4-gültig, S5-gültig

Intuitionismus

Problem Wie definiert man mathematische Objekte?
Wie beweist man mathematische Sätze?
Beispiel: Sei n die größte Primzahl so, daß $n-2$ ebenfalls prim ist. Falls eine solche Zahl nicht existiert, sei $n=0$.

Fragen Was, wenn $A \wedge B$ nur wahr ist, wenn man zeigen kann, welches von beiden wahr ist?
Was. wenn $\exists x P(x)$ nur wahr ist, wenn man zeigen kann, für welches a $P(a)$ wahr ist?
Was, wenn mathematische Objekte nur existieren, wenn man sie konstruieren (berechnen) kann?

Geschichte Brouwer, Heyting

System

Regel Abtrennungsregel

Axiome

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- $A \rightarrow (B \rightarrow A \,\&\, B)$.
- $A \,\&\, B \rightarrow A$.
- $A \,\&\, B \rightarrow B$.
- $A \rightarrow A \vee B$.
- $B \rightarrow A \vee B$.
- $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$.
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.
- $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

So Fragen

- Funktionale Vollständigkeit
- Wie viel Mathematik?
- Was ist mit Informatik?

Wie viel Logik braucht der Mensch?

- **action** (Krister Segerberg, John-Jules Meyer, and Marcus Kracht)
- **ancient** (Susanne Bobzien)
- and artificial intelligence — see artificial intelligence: logic and
- **of belief revision** (Sven Ove Hansson)
- **classical** (Stewart Shapiro)
- **combinatory** (Katalin Bimbó)
- **combining** (Walter Carnielli and Marcelo Esteban Coniglio)
- **conditionals** (Horacio Arlo-Costa)
- **connexive** (Heinrich Wansing)
- **deontic** (Paul McNamara)
- **dialogical** (Laurent Keiff)
- **epistemic** (Vincent Hendricks and John Symons)
- **free** (John Nolt)
- **fuzzy** (Petr Hajek)
- **and games** (Wilfrid Hodges)
- **hybrid** (Torben Braüner)
- in classical Indian philosophy — see Indian Philosophy (Classical): logic
- **independence friendly** (Tero Tulenheimo)
- **inductive** (James Hawthorne)
- **infinitary** (John L. Bell)
- **informal** (Leo Groarke)
- **intensional** (Melvin Fitting)
- **intuitionistic** (Joan Moschovakis)
- **justification** (Sergei Artemov and Melvin Fitting)
- **linear** (Roberto Di Cosmo and Dale Miller)
- **many-valued** (Siegfried Gottwald)
- **modal** (James Garson)
- **non-monotonic** (G. Aldo Antonelli)
- **paraconsistent** (Graham Priest and Koji Tanaka)
- **propositional dynamic** (Philippe Balbiani)
- **provability** (Rineke (L.C.) Verbrugge)
- **relevance** (Edwin Mares)
- **second-order and higher-order** (Herbert B. Enderton)