Metatheorie

Axiomatik, Funktionale Vollständigkeit, Korrektheit, Vollständigkeit

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Januar 2013

Axiomatischer Aufbau

Theorie nennt man eine deduktiv abgeschlossene Satzmenge: Die Menge aller Aussagen, die die Axiome enthält und alle Formeln, die aus ihnen mit Regeln abgeleitet werden können.

Axiome A1 $(A \supset (B \supset A))$

A2 $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$

A3 $((\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim B \supset A) \supset B))$

A4 $(\forall i A \supset A(i/i_1))$

(mit i_1 ein Term, der frei ist für die Variable i)

A5 $(\forall i(A \supset B) \supset (A \supset \forall i B))$

(mit i nicht frei in A)

Regeln R1 $(A \supset B), A \vdash B$

R2 $A \vdash \forall i A$

Der Beweisbegriff

Beweis der Formel B ist eine endliche Folge von Formeln $A_1, \ldots, A_n$, von denen jede eine Instanz eines der Axiome ist oder nach den Regeln aus den vorhergehenden Gliedern der Folge gewonnen wurde und für die gilt: A_n ist B.

Theorem ist eine Formel A, für die es einen Beweis gibt ($\vdash A$).

Ein Beispielbeweis

1. $A \supset ((B \supset A) \supset A) \supset ((A \supset (B \supset A)) \supset (A \supset A))$
2. $A \supset ((B \supset A) \supset A)$
3. $(A \supset (B \supset A)) \supset (A \supset A)$
4. $A \supset (B \supset A)$
5. $A \supset A$

$T1 \vdash A \supset A$

Wo sind die anderen Operatoren?

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &\approx_{\text{def}} {\sim}(A \supset {\sim}B) \\
A \vee B &\approx_{\text{def}} {\sim}A \vee B \\
A \equiv B &\approx_{\text{def}} (A \supset B) \wedge (B \supset A) \\
&\approx_{\text{def}} {\sim}((A \supset B) \supset {\sim}(B \supset A)) \\
\exists i A &\approx_{\text{def}} {\sim}\forall i {\sim}A
\end{aligned}
$$

Funktionale Vollständigkeit

Definition: Ein System von aussagenlogischen Grundoperatoren ist funktional vollständig, wenn mit diesen beliebige Wahrheitsfunktionen ausgedrückt werden können.

Beispiele NegSub, NegKon, NegAd
aber nicht: NegBiS, Neg, Kon

Beobachtung: Die beiden folgenden Operatoren bilden – jeweils einzeln für sich (!) funktional vollständige Systeme von Grundoperatoren:

A	B	$A \dagger B$	$A \mid B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$

Rechtfertigung

Warum gerade diese Regeln, diese Axiome? Wieso „muß" gelten: Wenn $A \supset B$ und A, dann gilt auch B?

– **die Welt** ist so?

– **vernünftiges Denken** ist so?

– **gutes Reden** ist so?

– **Vereinbarungen** sind so getroffen worden?

Beschreibend: Logische Regeln sollen nahe am Sprachgebrauch sein. Natürliche Sprache wird rekonstruiert.

Vorschreibend: Logische Regeln sollen Fehler korrigieren, Sprachgebrauch normieren.

Das System insgesamt hat bestimmte Eigenschaften!

Korrektheit

Definition Ein logisches System heißt genau dann **korrekt**, wenn jede Ableitung auch eine gültige Folgebeziehung ist:
Wenn $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \models B$.

Folge Jedes Theorem ist auch Tautologie.

Satz Die Prädikatenlogik (erster Stufe) ist korrekt.(Hilbert und Ackermann)

Beweiskern Jedes Axiom ist Tautologie, alle Regeln „vererben" Gültigkeit im Modell.

Vollständigkeit

Definition Ein logisches System heißt genau dann **vollständig**, wenn jede Folgebeziehung auch eine Ableitung ist:
Wenn $\Gamma \models B$, dann $\Gamma \vdash B$.

Folge Für jede Folgerung aus einer unendlichen Menge gibt es eine aus einer endlichen Untermenge (Kompaktheit).

Folge Jede Tautologie ist beweisbar.

Satz Die Prädikatenlogik (erster Stufe) ist vollständig. (Gödel, später Henkin)

Beweiskern Jede konsistente Aussagenmenge hat ein Modell.

Ausdrucksstärke

Die Logik, oder Logiken?

Stufe Eigenschaften von Eigenschaften. „Manche Philosophen zitieren nur einander"

Operatoren Andere Operatoreneigenschaften „Der Geist ist grün oder er ist nicht grün"

Mittel Neue Ausdrücke „Anna wollte kommen, wußte aber nicht, daß Bodo in dieser Straße wohnt"

Semantiken Wahrheitswertlücken, viele Wahrheitswerte, mögliche Welten