Natürliches Schließen

Ableiten, Beweisen, direkt, indirekt

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Januar 2013

Strukturregel Beweisen, Ableiten

Viertupel Zeilennummer, Abhängigkeitenliste, Formel, Rechtfertigung

Beweis $\vdash A$

- Hypothese einer Regel
- Theorem
- nach Regel aus vorhergehenden Zeilen

Ableitung $\Gamma \vdash A$

- Annahmeformel aus Γ
- Hypothese einer Regel
- Theorem
- nach Regel aus vorhergehenden Zeilen

Ende

- **Beweis:** zu beweisende Formel A aus $\emptyset$
- **Ableitung:** abzuleitende Formel A aus Annahmen Γ

Regeln

- Einführungs- und Beseitigungsregeln für alle logischen Konstanten
- Anwendung
  - auf Hauptoperatoren vorliegender Zeilen
  - indem Hypothesen gesetzt werden: E$\sim$, E$\supset$, B$\exists$
- Reihenfolge und Häufigkeit in der Anwendung ist grundsätzlich egal

Einsetzung in eine Variable

$A(i/j)$ ist das Resultat der Einsetzung der Individuenvariablen oder Individuenkonstanten j an allen Stellen des freien Vorkommens der Individenvariablen i in A, wobei kein freies i-Vorkommen zu einem gebundenen j-Vorkommen werden darf.

Beispiel

1. $(P(x,a) \wedge P(x,b))(x/y)$ ist $P(y,a) \wedge P(y,b)$
2. $(P(x,a) \wedge \forall y P(x,y))(x/y)$ ist nicht $P(y,a) \wedge \forall y P(y,y)$
3. $(P(x,a) \wedge P(x,b))(x/y)$ ist nicht $P(y,a) \wedge P(x,b)$
4. $(P(x,a) \wedge P(x,b))(x/b)$ ist $P(b,a) \wedge P(b,b)$

Beispiel Ableiten

$$A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

1.	$\{1\}$	$A \vee (B \wedge C)$	Ann
2.	$\{2\}$	A	Hyp$E \supset$
3.	$\{2\}$	$A \vee B$	$2E\vee$
4.	$\{2\}$	$A \vee C$	$2E\vee$
5.	$\{2\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$3, 4E\wedge$
6.	$\emptyset$	$A \supset (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$2, 5E \supset$
7.	$\{7\}$	$B \wedge C$	Hyp$E \supset$
8.	$\{7\}$	B	$7B\wedge$
9.	$\{7\}$	C	$7B\wedge$
10.	$\{7\}$	$A \vee B$	$8E\vee$
11.	$\{7\}$	$A \vee C$	$9E\vee$
12.	$\{7\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$10, 11E\wedge$
13.	$\emptyset$	$B \wedge C \supset (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$7, 12E \supset$
14.	$\{1\}$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$1, 6, 13B\vee$

Beispiel Beweisen

$\vdash \forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\exists x P(x)$

1.	$\{1\}$	$\forall x{\sim}P(x)$	Hyp$E\supset$
2.	$\{2\}$	$\exists x P(x)$	Hyp$E{\sim}$
3.	$\{3\}$	$P(a)$	Hyp$B\exists$
4.	$\{1\}$	${\sim}P(a)$	$1B\forall$
5.	$\{5\}$	$P(b)$	Hyp$E{\sim}$
6.	$\{1,3\}$	${\sim}P(b)$	$E{\sim}3,4,5$
7.	$\{7\}$	${\sim}P(b)$	Hyp$E{\sim}$
8.	$\{1,3\}$	${\sim}{\sim}P(b)$	$E{\sim}3,4,7$
9.	$\{1,3\}$	$P(b)$	$B{\sim}8$
10.	$\{1,3\}$	$P(b) \wedge {\sim}P(b)$	$E\wedge 7,9$
11.	$\{1,2\}$	$P(b) \wedge {\sim}P(b)$	$B\exists 2,3,10$
12.	$\{1,2\}$	$P(b)$	$B\wedge 11$
13.	$\{1,2\}$	${\sim}P(b)$	$B\wedge 11$
14.	$\{1\}$	${\sim}\exists x P(x)$	$E{\sim}2,12,13$
15.	$\emptyset$	$\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\exists x P(x)$	$1,6E\supset$

Verwendung von Theoremen

1.	$\{1\}$	$A \supset B$	Hyp$E \supset$
2.	$\{2\}$	$\sim B$	Hyp$E \supset$
3.	$\{3\}$	A	Hyp$E\sim$
4.	$\{1,3\}$	B	$1,3B \supset$
5.	$\{1,2\}$	$\sim A$	$2,3,4E\sim$
6.	$\{1\}$	$\sim B \supset \sim A$	$2,5E \supset$
7.	$\emptyset$	$A \supset B \supset (\sim B \supset \sim A)$	

$$\sim\exists x P(x) \supset \forall x \sim P(x)$$

1.	$\{1\}$	$\sim\exists x P(x)$	Ann
2.	$\emptyset$	$P(x) \supset \exists x P(x)$	The
3.	$\emptyset$	$P(x) \supset \exists x P(x) \supset (\sim\exists x P(x) \supset \sim P(x))$	The
4.	$\{1\}$	$\sim P(x)$	$1,2,3B \supset$
5.	$\{1\}$	$\forall x \sim P(x)$	$4E\forall$
6.	$\emptyset$	$\sim\exists x P(x) \supset \forall x \sim P(x)$	$1,5E \supset$

Indirekte Beweise

Satz: $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ genau dann, wenn
$A_1, \ldots, A_n, {\sim}B \vdash C, {\sim}C$ für irgendein C.

Beweis: $\boxed{\Longrightarrow}$ – B ist das C.
$\boxed{\Longleftarrow}$ – Setze in der rechten Ableitung „${\sim}B$" als Hypothese E$\sim$, mit E$\sim$, B$\sim$ erhält man die linke Ableitung.

Anwendung: Wenn gezeigt werden soll

- $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, oder
- $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B) \ldots))$

so führe $A_1, \ldots, A_n, {\sim}B$ zum Widerspruch.

Beispiel indirekt Beweisen

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \supset (\forall x{\sim}P(x) \supset {\sim}\forall x{\sim}Q(x))$$

1.	$\{1\}$	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	Ann
2.	$\{2\}$	$\forall x{\sim}P(x)$	Ann
3.	$\{3\}$	${\sim}{\sim}\forall x{\sim}Q(x)$	Ann i.B.
4.	$\{4\}$	$P(a) \vee Q(a)$	Hyp$B\exists$
5.	$\{2\}$	${\sim}P(a)$	$2B\forall$
6.	$\emptyset$	$P(a) \vee Q(a) \supset ({\sim}P(a) \supset Q(a))$	The
7.	$\{2,4\}$	$Q(a)$	$4,5,6B\supset$
8.	$\{3\}$	$\forall x{\sim}Q(x)$	$3B{\sim}$
9.	$\{3\}$	${\sim}Q(a)$	$8B\forall$
10.	$\emptyset$	$Q(a) \wedge {\sim}Q(a) \supset R(b) \wedge {\sim}R(b)$	The
11.	$\{2,3,4\}$	$R(b) \wedge {\sim}R(b)$	$8,9,10B\supset$
12.	$\{1,2,3\}$	$R(b) \wedge {\sim}R(b)$	$1,4,11B\exists$

Das Deduktionstheorem

Satz: $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

Beispiel: Anstelle von $\vdash A \supset B \supset (B \supset C \supset (A \supset C))$ zeige $A \supset B, B \supset C, A \vdash C$.

Bedeutung: Wenn $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$, dann lassen sich damit n neue *abgeleitete* Schlußregeln rechtfertigen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Gamma & A_1 \\ \hline \Gamma & A_2 \supset (A_3 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)) \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Gamma & A_1 \\ \Delta & A_2 \\ \hline \Gamma \cup \Delta & A_3 \supset (A_4 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)) \end{array}} \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Gamma & A_1 \\ \Delta & A_2 \\ & \vdots \\ \Xi & A_n \\ \hline \Gamma \cup \Delta \cup \ldots \cup \Xi & B \end{array}}$$

Beispiele abgeleitete Schlußregeln

$$\frac{\Gamma \quad A \vee (B \wedge C)}{\Gamma \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

$$\frac{\Gamma \quad \forall i {\sim} A}{\Gamma \quad {\sim}\exists i A}$$

$$\frac{\Gamma \quad A \supset B}{\Gamma \quad {\sim}B \supset {\sim}A}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \quad A \supset B \\ \Delta \quad {\sim}B\end{array}}{\Gamma, \Delta \quad {\sim}A}$$

$$\frac{\Gamma \quad {\sim}\exists i A}{\Gamma \quad \forall i {\sim} A}$$

$$\frac{\Gamma \quad \exists i (A \vee B)}{\Gamma \quad \forall i {\sim} A \supset {\sim}\forall i {\sim} B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \quad \exists i (A \vee B) \\ \Delta \quad \forall i {\sim} A\end{array}}{\Gamma, \Delta \quad {\sim}\forall i {\sim} B}$$