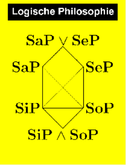
Formeln

Semantik zum zweiten, Tarski

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

November 2012



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich IK $\cup$ PK und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Variablenbelegung

Variablenbelegung $\mathfrak{V}$ nennt man eine Funktion, die jeder Individuenvariablen i einen Wert $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$ zuschreibt.

i-Variante $\mathfrak{V}_i$ einer Belegung $\mathfrak{V}$ ist jede Belegung, die in allen Werten bis auf möglicherweise für i mit der Belegung $\mathfrak{V}$ übereinstimmt.

Beispiele

1. **Träger:** Menge der natürlichen Zahlen
   Interpretation:
   $\mathfrak{I}(a_1) = 1, \mathfrak{I}(b_1) = 2, \mathfrak{I}(c_1) = 3, \mathfrak{I}(a_2) = 4, \ldots$
   $\mathfrak{I}(P) = \{x : \text{PRIM}(x)\},$
   $\mathfrak{I}(Q) = \{\langle x, y\rangle : \text{GRÖSSER}(x, y)\}, \ldots$
   Belegung: $\mathfrak{I}(x_1) = 1, \mathfrak{I}(y_1) = 1, \mathfrak{I}(z_1) = 1, \mathfrak{I}(x_2) = 1, \ldots$

2. **Träger:** Menge der Fahrzeuge, Fahrzeugteile
   Interpretation: $\mathfrak{I}(a_1) = \text{Audi}, \mathfrak{I}(b_1) = \text{Alfa}, \ldots$
   $\mathfrak{I}(P) = \{x : \text{KUNSTSTOFF}(x)\},$
   $\mathfrak{I}(Q) = \{\langle x, y\rangle : \text{TEURER}(x, y)\}, \ldots$
   Belegung: $\mathfrak{I}(x_1) = \text{Sicherung } 1, \mathfrak{I}(y_1) = \text{Hecktür}, \ldots$

Modelle für die Prädikatenlogik

Sei $\mathfrak{D}$ eine nichtleere Menge, $\mathfrak{I}(i) \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}(f^n) \subset \mathfrak{D}^n$ und $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$.

Wir definieren $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$:
A ist wahr (erfüllt) in einem Modell unter einer Belegung
Schema:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ genau dann, wenn
(*eine Wahrheitsbedingung in Abhängigkeit von der Form von A*)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ heißt: es ist nicht so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$

Die Prädikatformeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n)$,

wobei $\mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$

- $\mathfrak{I}^*$ ist entweder eine Interpretation oder eine Belegung, je nach Argument
- Im Modell unter der Belegung ist $P(a)$ wahr, wenn die Interpretation von a in der von P ist.
  Im Modell unter der Belegung ist $P(x)$ wahr, wenn die Belegung von x in der von P ist.
- Im Modell unter der Belegung ist $Q(a, x)$ wahr, wenn das Paar aus der Interpretation von a und der Belegung von x in der Interpretation von Q ist.

Die Negationen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models {\sim}A$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A$.

Sei $\mathfrak{w}$ = - gültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$,
und $\mathfrak{f}$ = - ungültig in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$.

A	${\sim}A$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models {\sim}{\sim}A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models {\sim}{\sim}A}$$

„Anna mag Bodo nicht“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ dort ungültig ist.

Die Konjunktionen

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \wedge B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \wedge B}$$

„Anna mag Bodo und sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ und „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Adjunktionen (Disjunktionen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B$ genau dann,
wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$.

A	B	$A \vee B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \vee B}$$

„Anna mag Bodo oder sie mag Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Subjunktionen (Implikationen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B$ genau dann,
wenn $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B$.

A	B	$A \supset B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models B}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A \supset B}$$

„Wenn Anna Bodo mag, dann mag sie auch Chris“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag Bodo nicht“ oder aber „Anna mag Chris“ auch dort gültig sind.

Die Bisubjunktionen (Implikationen in beiden Richtungen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B$ genau dann, wenn
$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B$, oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models B$.

A	B	$A \equiv B$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{w}$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models B}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models B \text{ und } \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \not\models A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \equiv B}$$

„Wenn Anna Bodo genau dann mag, wenn sie auch Chris mag“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag Bodo und auch Chris“ oder aber „Anna mag Bodo nicht und auch Chris nicht“ auch dort gültig sind.

Die Allaussagen (generelle Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models \forall i A$ genau dann,
wenn für alle i-Varianten $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}_i \models A$

Alles fließt …

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models \forall i A}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models A \text{ für beliebige } \mathfrak{M}, \mathfrak{B}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{B} \models \forall i A}$$

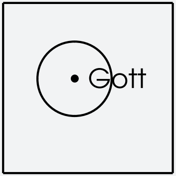
„Anna mag alle“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}$), wenn „Anna mag JEDEN“ für eine beliebige Auswahl von JEDER auch dort gültig ist.

Die Existenzaussagen (partikuläre Aussagen)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA$ genau dann, wenn
für mindestens eine i-Variante $\mathfrak{V}_i$ von $\mathfrak{V}$ gilt: $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_i \models A$

Es gibt einen Gott

. . .



$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A(j) \quad j - \mathrm{IK}}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \forall iA}{\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \exists iA}$$

„Anna mag jemanden“ ist genau dann gültig (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn „Anna mag EINEN“ für wenigstens eine Auswahl von EINER auch dort gültig ist.