Formeln

Semantik zum ersten

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

November 2012

Die Formeldefinition der Prädikatenlogik

1. Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, und $i_1, \ldots, i_n$ sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (plF)**.

3. Wenn A plF ist, ist $\sim A$ plF.

4. Wenn A und B plF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ plF.

5. Wenn A eine plF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ plF.

6. Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.

Vereinbarung über Klammersetzung

Ziel: Die Klammersetzung so vereinfachen (Klammern weglassen), daß die ursprüngliche Form eindeutig wiederhergestellt werden kann.

1. Außenklammern können weggelassen werden.

$(((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b))$ wird zu:
$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$1.^{-}$ Fehlende Außenklammern müssen restauriert werden.

Fortsetzung Klammernsetzung

2. Klammern um linke benachbarte gleiche Operatoren können weggelassen werden.

$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$2.^{-}$ Linke Klammern um benachbarte gleiche Operatoren müssen restauriert werden.

3. Klammern um bindungsstärkere von zwei benachbarten unterschiedlichen Operatoren können weggelassen werden. Bindungsstärke abnehmend: $\wedge \vee \supset \equiv$.

$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a) \vee Q(b)$

$3.^{-}$ Klammern um die bindungsstärkeren zweier benachbarter Operatoren müssen restauriert werden.

Referenz und Prädikation

referierende Termini werden verwendet, um auf Gegenstände zu verweisen

prädikative Termini werden verwendet um auszudrücken, wie Gegenstände sind oder in welchem Verhältnis sie stehen

prädikative Aussagen (einfache Aussagen, atomare Aussagen) schreiben Gegenständen Eigenschaften oder Relationen zu

Beispiele

- Anna ist klug. Anna mag Bodo. Anna sitzt zwischen Bodo und Chris. Annas Mutter heißt Anna.
- $5 > 2^{10}$, $7 + 5 = 12$, $7 + 5 = 12$ kommt in Kants Kritik der reinen Vernunft vor.
- Anna und Bodo sind verheiratet.
- Anna mag Bodo nicht. Anna, Bodo. Bodo mögen.

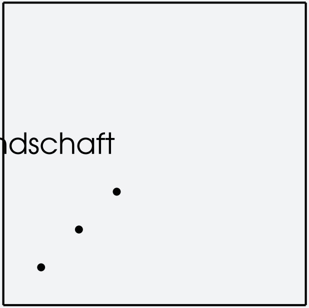
Eine Wahrheitstheorie – die Intuition

Frage: Wann ist ein Satz „ (Gegenstand) ist ein (Eigenschaft)“ wahr?

Antwort: Wenn der betreffende Gegenstand die in Frage stehende Eigenschaft tatsächlich hat.

$\mathfrak{D}$

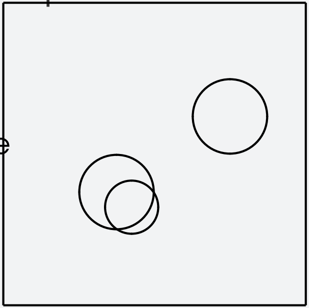
Anna, Bodo
Athen, die Freundschaft
...



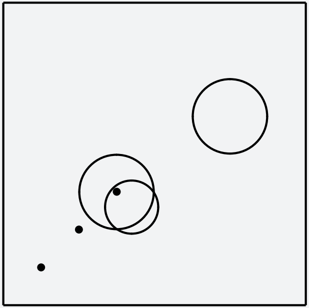
Eigenschaften und prädikative Sätze

$\mathfrak{D}$

schön, klug
gerecht, gerade
...



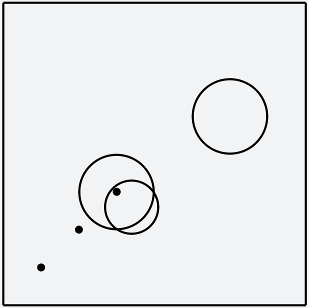
$\mathfrak{D}$



Mehrstellige Prädikationen

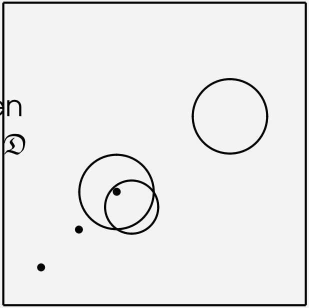
$\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$

mag, trägt
$\langle$Anna,Bodo$\rangle$
$\ldots$



$\mathfrak{D}^n$

n-stell. Relationen
$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $e_i \in \mathfrak{D}$
$\ldots$



Modelle

Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ (bei uns: die Sprache der Prädikatenlogik) ist ein Paar aus einer Trägermenge (die Gegenstände der Welt) und einer Interpretationsfunktion, die allen (Individuen- und Prädikat-) Konstanten der Sprache entsprechend Elemente des Gegenstandsbereiches, Mengen von solchen Elementen oder Mengen von Tupeln von solchen Elementen zuschreibt: $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$.

Der Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ ist eine nichtleere Menge.

Die Interpretation $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion, deren Argumentbereich IK $\cup$ PK und deren Wertebereich $\mathfrak{D} \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{D}^i)$ für alle i ist.

Beispiel

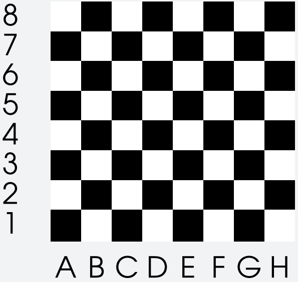
Eine konkrete Sprache:

IK: A1 – H8
PK: weiß, schwarz, ist neben, liegt horizontal zwischen, liegt vertikal zwischen, liegt diagonal zwischen

Prädikatenlogisch:

$a_1, a_2, \ldots, a_{64}, \ldots$
$P_1^1, P_2^1, Q_1^2, R_1^3, R_2^3, R_3^3, \ldots$

Ein konkretes Modell:



$\mathfrak{D} =$ die Menge der Felder.

$\mathfrak{I}$(A2) = das Feld erste Spalte, zweite Reihe

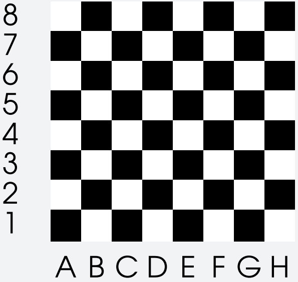
$\mathfrak{I}$(weiß) = die Menge der weißen Felder,
$\mathfrak{I}$(ist neben) = die Menge der Paare von Feldern, die nebeneinander liegen

Formalisierung

Formalisieren:

A2, B3, C4	$\rightsquigarrow$	a_9, a_{18}, a_{27}
weiß	$\rightsquigarrow$	P_1
schwarz	$\rightsquigarrow$	P_2
neben	$\rightsquigarrow$	Q
h-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_1
v-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_2
d-zwischen	$\rightsquigarrow$	R_3

Ein konkretes Modell:



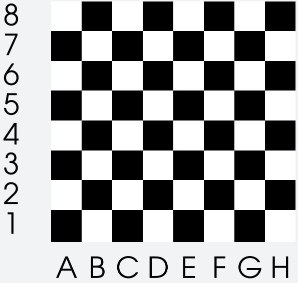
A2 ist weiß.	$P_1(a_9)$
B3 ist nicht schwarz.	$\sim P_2(a_{18})$
B3 ist nicht d-zwischen A2 und C4.	$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27})$
B3 hat Nachbarn.	$\exists x Q(x, a_{18})$
Alle Felder sind weiß.	$\forall x P_1(x)$

Wahrheitsbewertung

Interpretieren:

a_9, a_{18}, a_{27}	$\mathfrak{I}:$	A2, B3, C4
P_1	$\mathfrak{I}:$	Menge …
P_2	$\mathfrak{I}:$	Menge …
Q	$\mathfrak{I}:$	Paarmenge …
R_3	$\mathfrak{I}:$	Tripelmenge …

Ein konkretes Modell:



$$P_1(a_9) \overset{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_9) \in \mathfrak{I}(P_1)$$
$$\sim P_2(a_{18}) \overset{t}{\Leftrightarrow} \mathfrak{I}(a_{18}) \notin \mathfrak{I}(P_2)$$
$$\sim R_3(a_{18}, a_9, a_{27}) \overset{t}{\Leftrightarrow} \langle \mathfrak{I}(a_{18}), \mathfrak{I}(a_9), \mathfrak{I}(a_{27}) \rangle \notin \mathfrak{I}(R_3)$$
$$\exists x Q(x, a_{18}) \overset{t}{\Leftrightarrow} \text{für einen Wert } \mathfrak{V}(x) : \langle \mathfrak{V}(x), \mathfrak{I}(a_{18}) \rangle \in \mathfrak{I}(Q)$$
$$\forall x P_1(x) \overset{t}{\Leftrightarrow} \text{für alle Werte } \mathfrak{V}(x) : \mathfrak{V}(x) \in \mathfrak{I}(P_1)$$

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Das Problem: Wie werden die quantifizierten Formeln und die mit freien Variablen bewertet?

- $\forall x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn jedes einzelne Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $\exists x P(x)$ ist wahr im Modell, wenn irgendein Element aus $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{I}(P)$ ist.
- $P(x)$ ist wahr im Modell wenn x irgendein Wert aus $\mathfrak{D}$ gegeben wurde und der in $\mathfrak{I}(P)$ ist.

Variablenbelegungen (noch ungefähr)

Die Lösung: Betrachte Funktionen, die den Variablen Werte aus $\mathfrak{D}$ zuschreiben: Variablenbelegungen $\mathfrak{V}$.

- Wenn alle Belegungen, die verschiedene Werte für x liefern, Werte aus $\mathfrak{I}(P)$ liefern, ist die Allaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- Wenn eine der Belegungen, die verschiedene Werte für x liefert, einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ liefert, ist die Existenzaussage gültig im Modell (unter der Belegung).
- Wenn die aktuelle Belegung einen Wert aus $\mathfrak{I}(P)$ für x liefert, ist die offene Aussage gültig im Modell (unter der Belegung).

Variablenbelegungen

Variablen	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}^*$	$\mathfrak{B}^{**}$	$\mathfrak{B}_{x_2}$	$\mathfrak{B}_{x_n}$
x_1	A3	A1	A1	A3	A3
x_2	A5	A1	A5	A4	A5
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert
x_n	A5	A1	H6	A5	A3
x_{n+1}	C4	A1	H6	C4	C4
$\vdots$	...	A1	...	$\mathfrak{B}$-Wert	$\mathfrak{B}$-Wert

$\mathfrak{B}_\mathbf{i}$-Belegung in einem Modell heißt eine Belegung, die sich von der Belegung $\mathfrak{B}$ höchstens im Wert für die Variable i unterscheidet.

($\mathfrak{B}_i(j) = \mathfrak{B}(j)$ für alle verschiedenen Variablen i und j.)

Modelle für die Prädikatenlogik

Sei $\mathfrak{D}$ eine nichtleere Menge, $\mathfrak{I}(i) \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}(f^n) \subset \mathfrak{D}^n$ und $\mathfrak{V}(i) \in \mathfrak{D}$.

Wir definieren $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$:
A ist wahr (erfüllt) in einem Modell unter einer Belegung

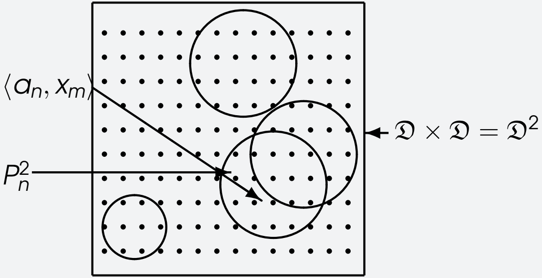
Schema:
$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$ genau dann, wenn
(*eine Wahrheitsbedingung in Abhängigkeit von der Form von A*)

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \not\models A$ heißt: es ist nicht so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models A$

Die Prädikatformeln

$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models f^n(i_1, \ldots, i_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}^*(i_1), \ldots, \mathfrak{I}^*(i_n) \rangle \in \mathfrak{I}(f^n)$,

wobei $\mathfrak{I}^*(i_j) = \begin{cases} \mathfrak{I}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenkonstante ist} \\ \mathfrak{V}(i_j) & \text{falls } i_j \text{ eine Individuenvariable ist.} \end{cases}$



$\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models P_n^2(a_n, x_m)$ genau dann, wenn $\langle \mathfrak{I}(a_n), \mathfrak{V}(x_m) \rangle \in \mathfrak{I}(P_n^2)$

„Anna mag Bodo“ ist genau dann erfüllt (in $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$), wenn die, die mit „Anna“ bezeichnet wird, und der, der mit „Bodo“ bezeichnet wird, ein Paar sind, das in der mit „mögen“ bezeichneten Menge ist.