Formeln

Von der natürlichen in die formale Sprache und zurück

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Oktober 2012

Das Alphabet – nichtlogische Zeichen

Zeichen	**Metazeichen**	**Verwendung**	**Beispiel**
$a, b, c, \ldots$ $a_1, b_1, c_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen-konstanten	Anna, Ben, der zahme Löwe
$x, y, z, \ldots$ $x_1, y_1, z_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen-variablen	Gegenstand, welcher, jener
$P, Q, R, \ldots$ $P_1^1, Q_1^1, R_1^1, \ldots$	$f, f_n^m, g_n^m, \ldots$	Prädikat-konstanten	klug, liebt, gibt, Student

Das Alphabet – logische Zeichen

Zeichen	**Name**	**vage Übersetzung**
$\sim$	Negation	nicht, in-, un-
$\wedge$	Konjunktion	und, sowohl als auch
$\vee$	Adjunktion	oder
$\supset$	Subjunktion	wenn–dann
$\equiv$	Bisubjunktion	genau dann, wenn; dann und nur dann
$\forall$	Allquantor	für alle
$\exists$	Existenzquantor	für einige
), (	Klammern	Gruppierung

Die Formeldefinition – atomare Formeln

1. Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, und $i_1, \ldots, i_n$ sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (plF)**.

$P^2(a, a_1)$	Formel	Anna mag Bodo
$Q^1(x)$	Formel	klug-sein
$Q^2(a_7, y)$	Formel	der goldene Berg ist größer als ...
$P^2(P^1, a_3)$	Keine!	
$f^1(x, j)$	Keine!	(drei Fehler)

Die Formeldefinition – Aussagenlogik

3. Wenn A plF ist, ist $\sim A$ plF.

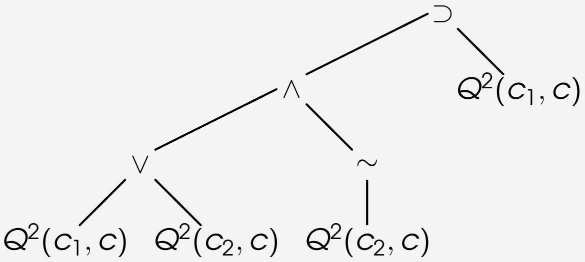
$R(x, a), \sim R(x, a), \sim\sim R(x, a), \ldots$ – mit Anna verheiratet sein, nicht mit Anna verheiratet sein, nicht nicht mit Anna verheiratet sein, ...

4. Wenn A und B plF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ plF.

$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$
Wenn der Gärtner den Hauslehrer ermordet hat oder der Butler den Hauslehrer ermordet hat, und der Butler hat ihn nicht ermordet, dann hat ihn der Gärtner ermordet.

Zur Erholung – Malen nach Formeln

$$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge {\sim}Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$$



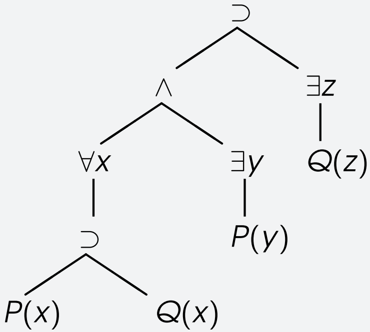
Die Formeldefinition – Quantoren

5. Wenn A eine plF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ plF.

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$
Wenn alles so ist, daß wenn es Grieche ist, es auch Mensch ist, und es Griechen gibt, dann gibt es auch Menschen.

Nochmal: Malen nach Formeln

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \land \exists y P(y)) \supset \exists z Q(z))$$



Die Formeldefinition – das Ende

Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.

Definitionen

Hauptoperator einer Formel ist der Operator, der bei der Bildung dieser Formel zuletzt angewendet wurde.

Teilformel einer Formel ist jeder Teil der Formel, der selbst Formel ist.

Aussagenlogisch ist eine Formel die keine Quantoren enthält.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$$

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y)) \supset \exists z Q(z))$	$\exists z Q(z)$
$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y \sim P(y))$	$Q(z)$
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\sim\forall y \sim P(y)$
$(P(x) \supset Q(x))$	$\forall y \sim P(y)$
$P(x)$	$\sim P(y)$
$Q(x)$	$P(y)$

Quantoren und Variablen

Wirkungsbereich eines Quantors $\forall i$ oder $\exists i$ in einer Formel $\forall iA$ beziehungsweise $\exists iA$ ist die Formel A.

Gebunden ist das Vorkommen einer Variablen unmittelbar hinter dem Quantorenzeichen und im Wirkungsbereich des entsprechenden Quantors. Ansonsten ist es **frei**.

$$\forall x \exists y(R(x,y,z) \supset \exists z(Q(z) \wedge {\sim}\forall y R(y,z,x)))$$

$$\boxed{\forall x}\,\underline{\exists y(R(\boxed{x},y,z) \supset \exists z(Q(z) \wedge {\sim}\forall y R(y,z,\boxed{x})))}$$

$$\forall x\,\boxed{\exists y}\,\underline{(R(x,\boxed{y},z) \supset \exists z(Q(z) \wedge {\sim}\forall \boxed{y} R(\boxed{y},z,x)))}$$

$$\forall x \exists y(R(x,y,z) \supset \boxed{\exists z}\,\underline{(Q(\boxed{z}) \wedge {\sim}\forall y R(y,\boxed{z},x))}))$$

$$\forall x \exists y(R(x,y,z) \supset \exists z(Q(z) \wedge {\sim}\boxed{\forall y}\,\underline{R(\boxed{y},z,x)})))$$

frei: $\forall x \exists y(R(x,y,\boxed{z}) \supset \exists z(Q(z) \wedge {\sim}\forall y R(y,z,x)))$

Formalisieren I:
Aus der natürlichen in die formale Sprache

Wer in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen ohne Einwilligung des Berechtigten ein Werk oder eine Bearbeitung oder Umgestaltung eines Werkes vervielfältigt, verbreitet oder öffentlich wiedergibt, wird mit Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.
(Aus den Straf- und Bußgeldvorschriften des Urheberrechtes)

Schritt I: Schlechtes Deutsch, gute Struktur

Für alle Leute und Werke irgendeiner Art und Verbreitungen einer Art gilt: Wenn etwas ein Werk oder eine Bearbeitung oder eine Umgestaltung eines Werkes ist und eine Vervielfältigung oder Verbreitung oder öffentliche Wiedergabe dessen durch die Person gibt, und die (Verbreitungen) sind nicht gesetzlich zugelassen und es gibt für sie keine Einwilligung des Berechtigten, dann wird die Person mit Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Formalisieren II: Komponenten und Ideen

Für alle Leute und Werke irgendeiner Art und Verbreitungen einer Art gilt: Wenn etwas ein Werk oder eine Bearbeitung oder eine Umgestaltung eines Werkes ist und eine Vervielfältigung oder Verbreitung oder öffentliche Wiedergabe dessen durch die Person gibt, und die (Verbreitungen) sind nicht gesetzlich zugelassen und es gibt für sie keine Einwilligung des Berechtigten, dann wird die Person mit Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

- Es gibt Leute, Werke, Verbreitungen, Einwilligungen
- Es gibt Freiheitsstrafe bis zu drei Jahren und Geldstrafe
- Für alle Leute, Werke und Verbreitungen gilt: Wenn die Leute die Werke verbreiten, dies nicht zugelassen ist und nicht eingewilligt wurde, werden die Leute bestraft.

Formalisieren III: Formel

Für alle x, y, z: Wenn x eine Person ist, y ein Werk oder eine Berarbeitung eines Werkes oder eine Umgestaltung eines Werkes, z Eine Vervielfältigung oder Verbreitung oder öffentliche Wiedergabe von y durch x, z nicht gesetzlich zugelassen ist und es kein x_1 gibt, so daß x_1 eine Einwilligung des Berechtigten für z ist, dann wird x mit Freiheitsstrafe bis drei Jahren bestraft oder mit Gedstrafe bestraft.

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z((((((P(x) \wedge ((Q_1(y) \vee Q_2(y)) \vee Q_2(y))) \\
&\qquad \wedge((R_1(z, y, x) \vee R_2(z, y, x)) \vee R_3(z, y, x))) \\
&\qquad\qquad \wedge{\sim}P_1(z)))\sim\exists x_1 P_2(z)) \\
&\qquad\qquad\qquad \supset (Q(x, a) \vee Q(x, b)))
\end{aligned}
$$

Vereinbarung über Klammersetzung

Ziel: Die Klammersetzung so vereinfachen (Klammern weglassen), daß die ursprüngliche Form eindeutig wiederhergestellt werden kann.

1. Außenklammern können weggelassen werden.

$(((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b))$ wird zu:
$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$1.^{-}$ Fehlende Außenklammern müssen restauriert werden.

Fortsetzung Klammernsetzung

2. Klammern um linke benachbarte gleiche Operatoren können weggelassen werden.

$((\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$

$2.^{-}$ Linke Klammern um benachbarte gleiche Operatoren müssen restauriert werden.

3. Klammern um bindungsstärkere von zwei benachbarten unterschiedlichen Operatoren können weggelassen werden. Bindungsstärke abnehmend: $\wedge \vee \supset \equiv$.

$(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a)) \vee Q(b)$ wird zu:
$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(a) \vee Q(b)$

$3.^{-}$ Klammern um die bindungsstärkeren zweier benachbarter Operatoren müssen restauriert werden.