Metasprache und Sprache

Womit und worüber wir reden
Prädikatenlogik

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Oktober 2012

Logische Philosophie

Theorien als sprachliche Objekte

Eine Theorie ist eine Menge von Sätzen.

- Soll alle wahren Sätze über das Gebiet enthalten.
- Soll keine falschen Sätze über das Gebiet enthalten.
- Soll hübsch, einfach, nachprüfbar . . . sein

Beispiele:

- Arithmetik
- Newtonsche Mechanik
- Evolutionstheorie

Galilei: Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben und ihre Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ohne die es ganz unmöglich ist auch nur einen Satz zu verstehen, ohne die man sich in einem dunklen Labyrinth verliert.

Sprachen von Theorien

Die Sprache einer Theorie ist ein Zeichenvorrat, Bildungsregeln für Termini und Sätze.

Beispiel Schulmathematik:

- $1, +, \leq, \int \ldots$
- $i + k$ ist eine Zahl, wenn i und k Zahlen sind; …
- $i \leq k$ ist eine Aussage, wenn i und k Zahlen sind …

Aber, halt: Wo kommen auf einmal i, k her? Und sind „Zahl“ und „wenn“ mathematische Ausdrücke?

Metasprachen für Sprachen

Die Metasprache einer (Objekt-) Sprache ist die Sprache, in der die Objektsprache (insbesondere ihr Aufbau, ihre Eigenschaften) beschrieben wird.

- eine natürliche Sprache und Bezeichnungen für Zahlen, mathematische Objekte und Ausdrücke wie „Beweis“ für die Sprache der Schulmathematik
- Mathematik und natürliche Sprache . . . für die Physik
- die Erstsprache für den Zweitsprachenerwerb
- eine natürliche Sprache und Mengentheorie für die Prädikatenlogik

Verwenden und Anführen

verwendet wird ein Ausdruck, wenn gemeint ist, was der Ausdruck bedeutet

angeführt wird ein Ausdruck, wenn er selbst gemeint ist

Beispiele

- Etwas, was kurz ist, ist kürzer als lange Dinge.
- „kurz“ ist genauso lang wie „lang“.
- Aus wie vielen Buchstaben besteht ein Buch?

Referenz und Prädikation

referierende Termini werden verwendet, um auf Gegenstände zu verweisen

prädikative Termini werden verwendet um auszudrücken, wie Gegenstände sind oder in welchem Verhältnis sie stehen

prädikative Aussagen (einfache Aussagen, atomare Aussagen) schreiben Gegenständen Eigenschaften oder Relationen zu

Beispiele

- Anna ist klug. Anna mag Bodo. Anna sitzt zwischen Bodo und Chris. Annas Mutter heißt Anna.
- $5 > 2^{10}$, $7 + 5 = 12$, $7 + 5 = 12$ kommt in Kants Kritik der reinen Vernunft vor.
- Anna und Bodo sind verheiratet.
- Anna mag Bodo nicht. Anna, Bodo. Bodo mögen.

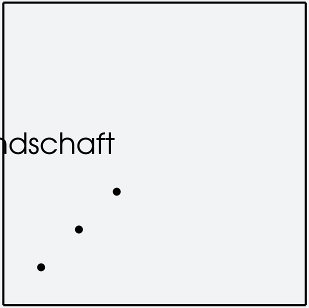
Eine Wahrheitstheorie – die Intuition

Frage: Wann ist ein Satz „⟨Gegenstand⟩ ist ein ⟨Eigenschaft⟩“ wahr?

Antwort: Wenn der betreffende Gegenstand die in Frage stehende Eigenschaft tatsächlich hat.

$\mathfrak{D}$

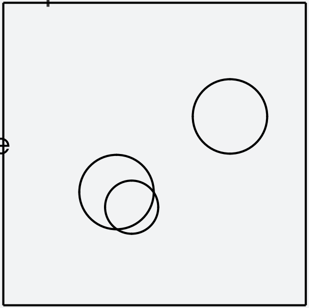
Anna, Bodo
Athen, die Freundschaft
…



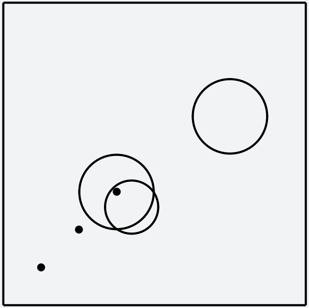
Eigenschaften und prädikative Sätze

$\mathfrak{D}$

schön, klug
gerecht, gerade
...



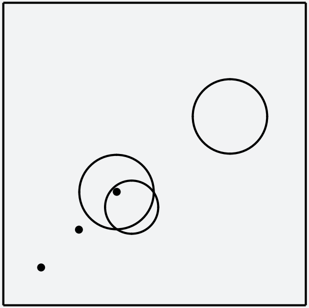
$\mathfrak{D}$



Mehrstellige Prädikationen

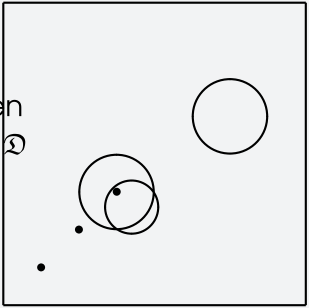
$\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$

mag, trägt
⟨Anna,Bodo⟩
...



$\mathfrak{D}^n$

n-stell. Relationen
$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $e_i \in \mathfrak{D}$
...



Das Alphabet – nichtlogische Zeichen

Zeichen	**Metazeichen**	**Verwendung**	**Beispiel**
$a, b, c, \ldots$ $a_1, b_1, c_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen- konstanten	Anna, Ben, der zahme Lö- we
$x, y, z, \ldots$ $x_1, y_1, z_1, \ldots$	$i, j, \ldots, i_n \ldots$	Individuen- variablen	Gegenstand, welcher, jener
$P, Q, R, \ldots$ $P^1_1, Q^1_1, R^1_1, \ldots$	$f, f^m_n, g^m_n, \ldots$	Prädikat- konstanten	klug, liebt, gibt, Student

Das Alphabet – logische Zeichen

Zeichen	**Name**	**vage Übersetzung**
$\sim$	Negation	nicht, in-, un-
$\wedge$	Konjunktion	und, sowohl als auch
$\vee$	Adjunktion	oder
$\supset$	Subjunktion	wenn–dann
$\equiv$	Bisubjunktion	genau dann, wenn; dann und nur dann
$\forall$	Allquantor	für alle
$\exists$	Existenzquantor	für einige
$)$, $($	Klammern	Gruppierung

Die Formeldefinition – atomare Formeln

1. Wenn f^n eine n-stellige Prädikatenkonstante ist, und $i_1, \ldots, i_n$ sind Individuenvariablen oder Individuenkonstanten, dann ist $f^n(i_1, \ldots, i_n)$ eine **Prädikatformel** (atomare Formel, einfache Formel).

2. Alleinstehende Prädikatformeln sind **prädikatenlogische Formeln (plF)**.

$P^2(a, a_1)$	Formel	Anna mag Bodo
$Q^1(x)$	Formel	klug-sein
$Q^2(a_7, y)$	Formel	der goldene Berg ist größer als ...
$P^2(P^1, a_3)$	Keine!	
$f^1(x, j)$	Keine!	(drei Fehler)

Die Formeldefinition – Aussagenlogik

3. Wenn A plF ist, ist $\sim A$ plF.

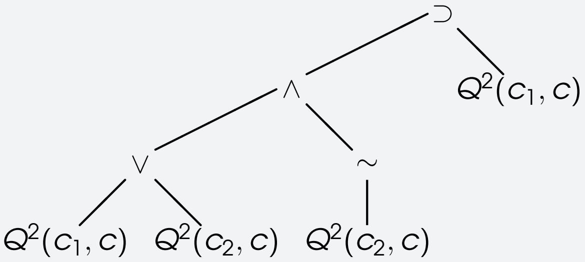
$R(x, a), \sim R(x, a), \sim\sim R(x, a), \ldots$ – mit Anna verheiratet sein, nicht mit Anna verheiratet sein, nicht nicht mit Anna verheiratet sein, ...

4. Wenn A und B plF sind, sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ plF.

$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$
Wenn der Gärtner den Hauslehrer ermordet hat oder der Butler den Hauslehrer ermordet hat, und der Butler hat ihn nicht ermordet, dann hat ihn der Gärtner ermordet.

Zur Erholung – Malen nach Formeln

$$(((Q^2(c_1, c) \vee Q^2(c_2, c)) \wedge \sim Q^2(c_2, c)) \supset Q^2(c_1, c))$$



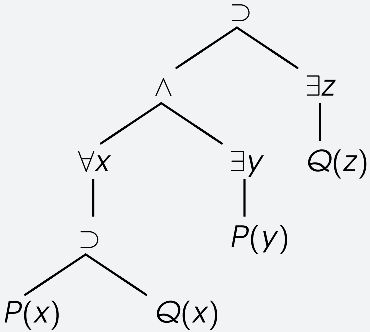
Die Formeldefinition – Quantoren

5. Wenn A eine plF ist und i eine Individuenvariable, sind $\forall iA$ und $\exists iA$ plF.

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists yP(y)) \supset \exists zQ(z))$
Wenn alles so ist, daß wenn es Grieche ist, es auch Mensch ist, und es Griechen gibt, dann gibt es auch Menschen.

Nochmal: Malen nach Formeln

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists y P(y)) \supset \exists z Q(z))$$



Definitionen

Hauptoperator einer Formel ist der Operator, der bei der Bildung dieser Formel zuletzt angewendet wurde.

Teilformel einer Formel ist jeder Teil der Formel, der selbst Formel ist.

Aussagenlogisch ist eine Formel die keine Quantoren enthält.

$$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y\sim P(y)) \supset \exists zQ(z))$$

$((\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y\sim P(y)) \supset \exists zQ(z))$	$\exists zQ(z)$
$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \sim\forall y\sim P(y))$	$Q(z)$
$\forall x(P(x) \supset Q(x))$	$\sim\forall y\sim P(y)$
$(P(x) \supset Q(x))$	$\forall y\sim P(y)$
$P(x)$	$\sim P(y)$
$Q(x)$	$P(y)$

Die Formeldefinition – das Ende

Nichts anderes ist prädikatenlogische Formel.