Mengen

Der Anfang von allem

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Oktober 2012

Logische Philosophie

Georg Cantor

Menge nennt man jede Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens zu einer Gesamtheit.

Element heißen die zusammengefassten Objekte einer Menge.

Wohlunterschiedenheit bewirkt, daß jedes Element genau einmal in der Menge ist.

Wir schreiben $k \in M$, $l \notin M$, $\{x : \ P(x)\}$

Angenommen, es gibt eine (offene) Aussage $P(x)$ über einen Grundbereich D. Dann kann man Cantors Idee folgendermaßen aufschreiben:

> Es gibt eine Menge M so, daß für alle Gegenstände aus D gilt, sie sind genau dann Element der Menge, wenn sie die Eigenschaft P haben.
>
> $\exists M \forall x \, (x \in M \leftrightarrow P(x))$

Beispiele für Mengen und nicht-Mengen

- alle Studierenden in diesem Raum
- die Menge der Studierenden in diesem Raum
- die Menge der Wolken über Dresden (gerade jetzt)
- die Menge, die aus der Menge der Studierenden und aus der Menge der Lehrenden in diesem Raum besteht

Stimmt das so?

Wie viele? Beschreibt jede Eigenschaft eine Menge, ist jede Menge von einer Eigenschaft beschrieben?
Die Menge der Lebewesen mit Herz und der mit Nieren sind gleich, die Eigenschaften ein Herz bzw. Nieren zu besitzen, nicht.

Russell Definiert jede Eigenschaft eine Menge?
Betrachten wir $x \notin x$ – die Eigenschaft, sich nicht als Element zu enthalten. Dann:

Es gibt eine Menge, die nur die Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten.
Nennen wir sie **R**.
Alle Mengen sind genau dann Element von **R**, wenn sie sich nicht selbst enthalten.
Also ist **R** genau dann Element von sich, wenn es sich nicht enthält.

Russell, formal geschrieben

(1) $\exists M \forall x\,(x \in M \leftrightarrow x \notin x)$; nennen wir das M **R**

$$\forall x\,(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$$

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

Relationen zwischen Mengen, spezielle Mengen

Identisch sind zwei Mengen, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen.

$$(2) \quad M_1 = M_2 \quad =_{dfn} \quad \forall x\,(x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)$$

Untermenge einer Menge M_2 ist M_1 dann, wenn alle ihre Elemente auch Elemente von M_2 sind.

$$(3) \quad M_1 \subseteq M_2 \quad =_{dfn} \quad \forall x\,(x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$$

Leer heißt die Menge, die keine Elemente enthält.

$$(4) \quad \emptyset \quad =_{dfn} \quad \{x : x \neq x\} \qquad (\sim\exists x\; x \in \emptyset)$$

Universal heißt die Menge, die alle Elemente enthält.

$$(5) \quad \mathcal{U} \quad =_{dfn} \quad \{x : x = x\} \qquad (\forall x\; x \in \mathcal{U})$$

Relationen zwischen Mengen, spezielle Mengen – Beispiele

Identisch sind zwei Mengen, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen.
die Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen und die Menge aller durch 2 und auch 3 teilbaren Zahlen sind identisch

Untermenge einer Menge M_2 ist M_1 dann, wenn alle ihre Elemente auch Elemente von M_2 sind.
die Menge aller Affen ist Untermenge der Menge aller Säugetiere

Leer heißt die Menge, die keine Elemente enthält.
die Menge der runden Quadrate ist leer

Universal heißt die Menge, die alle Elemente enthält.
die Menge der physischen oder nichtphysischen Gegenstände ist universal

Operationen über Mengen

Schnittmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element beider Mengen sind.

(6) $M_1 \cap M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$

Vereinigungsmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element wenigstens einer der Mengen sind.

(7) $M_1 \cup M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$

Differenzmenge zweier Mengen ist die Menge der Elemente, die im Minuend aber nicht im Subtrahent enthalten sind.

(8) $M_1 \backslash M_2 \quad =_{dfn} \quad \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$

Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller ihrer Untermengen.

(9) $\mathfrak{P}(M) \quad =_{dfn} \quad \{x : x \subseteq M\}$

Operationen über Mengen – Beispiele I

Schnittmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element beider Mengen sind.
die Schnittmenge der Menge aller durch 2 teilbaren und der durch 3 teilbaren Zahlen ist die der durch 6 teilbaren Zahlen

Vereinigungsmenge zweier Mengen ist die Menge aller Gegenstände, die Element wenigstens einer der Mengen sind.
die Vereinigungsmenge der Menge der linke-Hand-Finger und der Menge der rechte-Hand-Finger ist die Menge der Finger

Operationen über Mengen – Beispiele II

Differenzmenge zweier Mengen ist die Menge der Elemente, die im Minuend aber nicht im Subtrahent enthalten sind.
die Differenzmenge zwischen der Menge der Finger und der Menge der Daumen ist die Menge der Zeige-, Mittel-, Ring- und kleinen Finger

Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller ihrer Untermengen.
die Potenzmenge der Menge der Winnetou-Bände ($\{I, II, III\}$) ist die Menge $\{\emptyset, \{I\}, \{II\}, \{III\}, \{I, II\}, \{I, III\}, \{II, III\}, \{I, II, III\}\}$

Tupel, Kartesisches Produkt

Geordnetes Paar heißt eine Zweiermenge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt.

(10) $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \quad =_{dfn} \quad x = x_1$ und $y = y_1$

$$\langle x, y\rangle \quad =_{dfn} \quad \{x, \{x, y\}\}$$

Geordnetes n-Tupel heißt eine n-Menge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt.

(11) $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$

$$=_{dfn} \quad x_1 = y_1 \ldots x_n = y_n$$

Kartesisches Produkt von n Mengen heißt die Menge aller (geordneten) n-Tupel aus je einem Element jeder Menge.

(12) $M_1 \times \ldots \times M_n \quad =_{dfn}$

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_1 \in M_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x_n \in M_n\}$$

Tupel, Kartesisches Produkt – Beispiele

Geordnetes Paar heißt eine Zweiermenge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt. die Zweiermengen Anna,Bodo und Bodo,Anna sind gleich, nicht aber die geordneten Paare

Geordnetes n-Tupel heißt eine *n*-Menge, bei der die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt. die Dreiermengen I,II,III und II,I,III und III,II,I sind gleich, nicht aber die geordneten Tripel

Kartesisches Produkt von *n* Mengen heißt die Menge aller (geordneten) *n*-Tupel aus je einem Element jeder Menge. das Kartesische Produkt aus Anna,Bodo und Winnetou ist $\{\langle \text{Anna}, \text{I}\rangle, \langle \text{Anna}, \text{II}\rangle, \langle \text{Anna}, \text{III}\rangle, \langle \text{Bodo}, \text{I}\rangle, \langle \text{Bodo}, \text{II}\rangle, \langle \text{Bodo}, \text{III}\rangle\}$

Relationen

Relation auf (zwischen) n Mengen nennt man jede Untermenge des n-stelligen kartesischen Produktes der Mengen.
n-**stellige Relation** auf einer Menge nennt man jede Untermenge des n-fachen kartesischen Produktes der Menge mit sich selbst.

(13) $R(M_1, \ldots, M_n) \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$

Beispiel $\{\langle \text{Anna}, \text{II} \rangle, \langle \text{Anna}, \text{III} \rangle, \langle \text{Bodo}, \text{I} \rangle, \langle \text{Bodo}, \text{II} \rangle\}$

Eigenschaften von zweistelligen Relationen

reflexiv: für alle x: $R(x, x)$
wahrnehmen

symmetrisch: für alle x, y: wenn $R(x, y)$, dann $R(y, x)$
telefonieren-mit

transitiv: für alle x, y, z: wenn $R(x, y)$ und $R(y, z)$, dann $R(x, z)$
Schwester-sein

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch, transitiv
gleichgroß-sein