

5. Übungsblatt

Musterlösung

1. Was bedeuten die folgenden Aussagen, warum gelten sie?

(a) Für alle A, B gilt: Wenn $\vdash A$ und $\vdash B$, dann $A \approx B$.

2

- Wegen der Konsistenz der Prädikatenlogik sind alle Theoreme Tautologien. Tautologien sind in allen Modellen gültig – also machen alle Modelle alle Tautologien gleichermaßen gültig, also gibt es kein Modell, daß eine der Formeln gültig und die andere ungültig werden lassen kann. Also sind sie äquivalent.

Die Aussage besagt: Alle Theoreme sind äquivalent.

(b) Für alle A, i : Wenn $\vdash A$ und A enthält die Individuenkonstante oder freie Individuenvariable i , dann gilt $\vdash \forall j A(i/j)$.

2

- Angenommen, i ist eine freie Variable und A ist beweisbar. Dann wird aus dem Beweis für A einer für $A(i/j)$, indem in jeder Beweiszeile überall j für i eingesetzt wird. Da j nicht frei in den Annahmeformeln vorkommt (es gibt schließlich keine), kann nun generalisiert werden (Einführung des Allquantors). Genauso wird im Falle von Individuenkonstanten i vorgegangen.

Die Aussage besagt: In Theoremen kommt man ohne freie Variablen und ohne Konstanten aus.

(c) Für alle A_i, B : Wenn $A_1, \dots, A_n \vdash B$ ($1 \leq i \leq n$), dann ist $\{A_1, \dots, A_n, B\}$ erfüllbar oder $\{A_1, \dots, A_n\}$ ist inkonsistent.

2

[Hinweis: Der Beweis für diese Aussage ist nicht sehr schwierig, aber lang, naheliegend ist eine Induktion über die Länge der Ableitung $A_1, \dots, A_n \vdash B$. Mir reicht hier eine allgemeine Argumentation.]

- Eine Überprüfung zeigt, daß a) alle Regeln Gültigkeit im Modell vererben: sind alle Prämissen gültig in einem Modell, ist auch die Konklusion einer Regel gültig in diesem Modell; b) deswegen auch alle Theoreme, die schon

bewiesen sind, gültig in diesem Modell sind (und in jedem anderen). Das ist die Grundlage für die genannte Induktion. Es kann also nichts „hinzukommen“ beim Ableiten, was die Menge aus Prämissen und Konklusion inkonsistent machen würde . . . falls es nicht die Prämissenmenge schon ist.

Die Aussage besagt: Ableiten erhält Gültigkeit im Modell.

2. Gelten die Umkehrungen der Sätze oben? (Mit „Umkehrung“ ist gemeint: Ein Satz *Wenn A so B* hat den Satz *Wenn B so A* zur Umkehrung.) Warum, oder warum nicht? Erläutern Sie bitte. **6**
- Nein, zwei Formeln können äquivalent sein, ohne (einzeln, voneinander unabhängig) beweisbar zu sein. Beispielsweise trifft das auf das Formelpaar $P(a), P(a) \wedge P(a)$ zu.
 - Ja, wenn eine Allaussage beweisbar ist, kann der Quantor auf Variablen oder Konstanten beseitigt werden. Das gilt wegen der Beseitigungsregel des Allquantors.
 - Nein, nicht jedes Element einer konsistenten Menge ist aus der Restmenge ableitbar. Die Menge $\{P(a) \vee P(b), P(a)\}$ ist erfüllbar, aber es gilt $P(a) \vee P(b) \not\vdash P(a)$.
3. Erläutern Sie den Unterschied zwischen folgenden beiden Aufgabenstellungen: **2**
- Zeigen Sie, daß $\models A$. Zeigen Sie, daß $\vdash A$.
- Im ersten Fall handelt es sich um Gültigkeit in allen Modellen, es muß also mit Hilfe der semantischen Regeln gezeigt werden, daß es kein widerlegendes Modell (mit Belegung, wenn nötig) gibt. Im zweiten Fall handelt es sich um Ableitbarkeit aus der leeren Mengen, die Formel muß also als letzte Zeile eines Beweises nach den Regeln des natürlichen Schließens erscheinen, die Abhängigkeitsmenge hat leer zu sein.

4. Zeigen Sie:

(a) $\vdash ((A \supset B) \supset A) \supset (B \supset A)$

2

- Das Formelschema ist eine Subjunktion, also wird mit der Regel zur Einführung einer Subjunktion begonnen:

1.	{1}	$(A \supset B) \supset A$	HypE \supset
2.	{2}	B	HypE \supset
3.	{3}	B	HypE \supset
4.	{4}	A	HypE \supset
5.	{3}	$A \supset B$	$E \supset 4, 3$
6.	\emptyset	$B \supset (A \supset B)$	$E \supset 3, 5$
7.	{2}	$A \supset B$	$B \supset 2, 6$
8.	{1, 2}	A	$B \supset 1, 7$
9.	{1}	$B \supset A$	$E \supset 2, 8$
10.	\emptyset	$((A \supset B) \supset A) \supset (B \supset A)$	$E \supset 1, 9$

Die Zeilen 3.-6. sind nichts anderes als der Beweis des Theorems in 6.

(b) $\forall x \forall y (P(x) \supset (Q(y) \supset R(y))), \forall x P(x) \supset Q(b),$
 $(\forall x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \forall x P(x) \vdash R(b)$

2

- Die Ableitung ist leicht direkt zu führen:

1.	{1}	$\forall x \forall y (P(x) \supset (Q(y) \supset R(y)))$	Ann
2.	{2}	$\forall x P(x) \supset Q(b)$	Ann
3.	{3}	$(\forall x P(x) \supset \forall x P(x)) \supset \forall x P(x)$	Ann
4.	\emptyset	$\forall x P(x) \supset \forall x P(x)$	The
5.	{3}	$\forall x P(x)$	$B \supset 3, 4$
6.	{2, 3}	$Q(b)$	$B \supset 2, 5$
7.	{1}	$\forall y (P(x) \supset (Q(y) \supset R(y)))$	$B \forall 1$
8.	{1}	$P(x) \supset (Q(b) \supset R(b))$	$B \forall 7$
9.	{3}	$P(x)$	$B \forall 5$
10.	{1, 2}	$Q(b) \supset R(b)$	$B \supset 8, 9$
11.	{1, 2, 3}	$R(b)$	$B \supset 6, 10$

In Zeile 4 ist ein Theorem verwendet worden.

(c) $\exists x(P(x) \vee Q(x) \supset R(x)), \exists x \sim R(x), \forall x \forall y(R(x) \equiv R(y))$
 $\vdash \exists x(\sim P(x) \vee \sim Q(x))$

• Hier ist das Problem, daß in richtiger Reihenfolge mit den Quantoren umgegangen werden muß.

- | | | |
|---------------|--|----------------------|
| 1. {1} | $\exists x(P(x) \vee Q(x) \supset R(x))$ | Ann |
| 2. {2} | $\exists x \sim R(x)$ | Ann |
| 3. {3} | $\forall x \forall y(R(x) \equiv R(y))$ | Ann |
| 4. {4} | $P(a) \vee Q(a) \supset R(a)$ | HypB \exists 1 |
| 5. {5} | $\sim R(b)$ | HypB \exists 2 |
| 6. {3} | $\forall y(R(a) \equiv R(y))$ | B \forall 3 |
| 7. {3} | $R(a) \equiv R(b)$ | B \forall 6 |
| 8. {3, 5} | $\sim R(a)$ | ASR5, 7 |
| 9. {3, 4, 5} | $\sim(P(a) \vee Q(a))$ | ASR4, 8 |
| 10. {2, 3, 4} | $\sim(P(a) \vee Q(a))$ | B \exists 2, 5, 9 |
| 11. {2, 3, 4} | $\sim P(a) \wedge \sim Q(a)$ | ASR10 |
| 12. {2, 3, 4} | $\sim P(a)$ | $B \wedge$ 11 |
| 13. {2, 3, 4} | $\sim P(a) \vee \sim Q(a)$ | $E \vee$ 12 |
| 14. {2, 3, 4} | $\exists x(\sim P(x) \vee \sim Q(x))$ | $E \exists$ 13 |
| 15. {1, 2, 3} | $\exists x(\sim P(x) \vee \sim Q(x))$ | B \exists 1, 4, 14 |

In Zeile 8 ist eine abgeleitete Schlußregel verwendet worden:

$$\frac{\Gamma \quad A \equiv B \quad \Delta \quad \sim B}{\Gamma, \Delta \quad \sim A}$$

In Zeile 9 ist eine abgeleitete Schlußregel verwendet worden:

$$\frac{\Gamma \quad A \supset B \quad \Delta \quad \sim B}{\Gamma, \Delta \quad \sim A}$$

In Zeile 11 ist eine abgeleitete Schlußregel verwendet worden:

$$\frac{\Gamma \quad \sim(A \vee B)}{\Gamma \quad \sim A \wedge \sim B}$$