

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 20. Dezember
(Briefkasten Sekretariat Logik) bis 12:00Uhr

8. Dezember 2010

1. Zeigen Sie folgende Ableitungen:

- (a) $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$ **5**
- (b) $\forall x (P(x) \supset Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ **5**
- (c) $\forall x ((P(x) \supset Q(x)) \wedge (Q(x) \supset P(x))),$ **5**
 $\forall y ((Q(y) \supset R(y)) \wedge (R(y) \supset Q(y)))$
 $\vdash \forall z ((P(z) \supset R(z)) \wedge (R(z) \supset P(z)))$

2. Was läuft hier falsch und warum?

- (a) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \not\vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$, aber **5**
1. $\{1\} \quad \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \quad \text{Ann.}$
 2. $\{1\} \quad \exists x P(x) \quad \mathbf{B} \wedge 1$
 3. $\{1\} \quad \exists x Q(x) \quad \mathbf{B} \wedge 1$
 4. $\{4\} \quad P(a) \quad \text{Hyp} \mathbf{B} \exists$
 5. $\{5\} \quad Q(a) \quad \text{Hyp} \mathbf{B} \exists$
 6. $\{4, 5\} \quad P(a) \wedge Q(a) \quad \mathbf{E} \wedge 4, 5$
 7. $\{4, 5\} \quad \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \mathbf{E} \exists 6$
 8. $\{1\} \quad \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \mathbf{B} \exists 7$
- (b) $\forall x \exists y P(x, y) \not\vdash \exists y \forall x P(x, y)$, aber **5**
1. $\{1\} \quad \forall x \exists y P(x, y) \quad \text{Ann.}$
 2. $\{1\} \quad \exists y P(x, y) \quad \mathbf{B} \forall 1$
 3. $\{3\} \quad P(x, a) \quad \text{Hyp.} \mathbf{B} \exists$
 4. $\{3\} \quad \forall x P(x, a) \quad \mathbf{E} \forall 3$
 5. $\{3\} \quad \exists y \forall x P(x, y) \quad \mathbf{E} \exists 4$
 6. $\{1\} \quad \exists y \forall x P(x, y) \quad \mathbf{B} \exists 2, 3, 5$

(c) $\exists y P(y) \not\vdash \forall x P(x)$, aber

5

1. $\{1\} \quad \exists y P(y) \quad \text{Ann.}$
2. $\{2\} \quad P(x) \quad \text{Hyp} \mathbf{B}\exists$
3. $\{2\} \quad \forall x P(x) \quad \mathbf{E}\forall 2$
4. $\{1\} \quad \forall x P(x) \quad \mathbf{B}\exists 1, 2, 3$

ZUSATZ Eine Annahmemenge A_1, \dots, A_n heiße widersprüchlich, wenn sich aus ihr eine Formel C als auch deren Negat $\sim C$ ableiten lassen.

5

Zeigen Sie: Wenn A_1, \dots, A_n widersprüchlich ist, gilt für jede Formel B : $A_1, \dots, A_n \vdash B$.