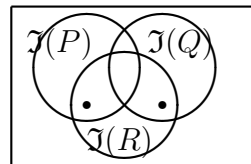


4. Übungsblatt

Musterlösung

1. Hier ist ein Bild eines Modells:



(Die beiden Punkte sind die beiden einzigen Elemente des Individuenbereiches.)

- Es sind viele Formeln, die richtige Lösungen produzieren. Sie sollten jedoch keine Individuenkonstanten verwenden, weil diese noch passend interpretiert werden müßten – und das ist nicht vorgegeben.

(a) Schreiben Sie zwei Formeln auf, die im beschriebenen Modell gültig sind, und zwei Formeln, die im beschriebenen Modell nicht gültig sind. **4**

gültig	nicht gültig
$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists x \sim R(x)$
$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(b) Zeichnen oder beschreiben Sie für eine der gültigen Formeln ein Modell, in dem sie ungültig ist. Zeichnen oder beschreiben Sie für eine der ungültigen Formeln ein Modell, in dem sie gültig ist. **4**

- Die Formel $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ wird ungültig, wenn im Modell oben der Gegenstand entfernt wird, der die P -Eigenschaft hat.

Die Formel $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ wird gültig, wenn im Modell oben ein zusätzlicher Gegenstand eingefügt wird, der in $J(P) \cap J(Q)$ liegt.

2. Was sind gültige beziehungsweise ungültige logische Folgerungen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. Falls es sich nicht um eine korrekte logische Folgerung handelt, versuchen Sie die Folgebeziehung zu „reparieren“, indem Sie die Prämissenmenge entsprechend verändern oder ergänzen.

(a) Anna ist schwanger. Also ist Anna weiblich.

2

- Folgt nicht. Es ist eine Tatsache in unserer Welt, daß nur weibliche Lebewesen schwanger werden – dies gilt aber nicht in beliebigen Modellen. Nimmt man jedoch „Wer schwanger ist, ist weiblich“ oder eine äquivalente Aussage zu den Prämissen hinzu, liegt eine gültige Folgebeziehung vor.

(b) Albert Einstein hat gesagt, daß Gott nicht würfele. Einstein ist ein genialer Physiker. Also würfelt Gott nicht.

2

- Folgt nicht. Daraus, daß Einstein auf seinem Gebiet (fast immer) recht hatte, folgt nicht daß alle seine Aussagen stimmen. Eine plausible, aber immer noch nicht logisch gültige, Folgebeziehung kann man erhalten, wenn zu den Prämissen hinzugefügt wird: Die Aussage über das Würfeln ist eine Aussage über die Physik. Auf dem Gebiet ist Einstein eine Autorität. Solchen Autoritäten kann und soll man glauben, was sie über ihr Gebiet sagen, ist wahr.

(c) Anna, Bodo und Caro sind in einer Übungsgruppe und haben jeder eine Nase. Also haben alle Gruppenmitglieder eine Nase.

2

- Folgt nicht. Es steht nirgendwo, daß Anna, Bodo und Caro die einzigen Gruppenmitglieder sind. Vielleicht gibt es weitere, die ohne Nase sind. Die Reparatur ist offensichtlich.

- Solche zusätzlichen Prämissen werden häufig mitgedacht, ohne explizit formuliert zu werden. Für philosophische Argumentationen ist es oft sehr interessant herauszubekommen, welche zusätzlichen Annahmen sich versteckt haben.

3. Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Menge Γ ist inkonsistent. Dann ist $\Gamma \cup \Delta$ auch inkonsistent.

2

- Das stimmt. Ist Γ inkonsistent, dann gibt es kein Modell welches alle Formeln aus der Menge gültig werden läßt. Da $\Gamma \subset \Gamma \cup \Delta$ gilt, gibt es auch kein Modell für die größere Menge.
- (b) Die Folgerung $\Gamma \models A \supset B$ gilt. Dann gilt auch $\Gamma, A \models B$. **2**
- Das stimmt. $\Gamma \models A \supset B$ heißt, daß jedes Modell für alle Formeln aus Γ die Formel A ungültig, oder die Formel B gültig werden läßt. Ist A ungültig, dann werden Modelle für $\Gamma \cup A$ nicht betrachtet (nach Definition überprüfen wir alle Modelle, in denen alle Formeln aus $\Gamma \cup A$ *gültig* sind darauf, ob sie auch B gültig werden lassen). Ist B gültig, dann gilt nach Definition der Folgebeziehung $\Gamma, A \models B$.
- (c) Die Mengen $\Gamma \cup \Delta$ und $\Delta \cup \Xi$ sind beide erfüllbar. Dann ist auch $\Gamma \cup \Xi$ erfüllbar. **2**
- Stimmt nicht. Hier reicht ein Gegenbeispiel dreier ein-elementiger Mengen:
- | | | | | | |
|----------|-----|-----------------|-----------------------|-----|-----------------|
| Γ | $=$ | $\{P(a)\}$ | $\{P(a), Q(a)\}$ | $-$ | erfüllbar |
| Δ | $=$ | $\{Q(a)\}$ | $\{Q(a), \sim P(a)\}$ | $-$ | erfüllbar |
| Ξ | $=$ | $\{\sim P(a)\}$ | $\{P(a), \sim P(a)\}$ | $-$ | nicht erfüllbar |