

# 1. Übungsblatt

## Musterlösung

*Falls Sie nicht alle Punkte erhalten haben, versuchen Sie bitte herauszufinden, warum das so ist. Sobald die Arbeiten korrigiert sind – fragen Sie die Tutoren –, können Sie während der Sprechstunde Einsicht nehmen.*

1. (a) Bilden die folgenden Beschreibungen Mengen? Begründen Sie Ihre Meinung, wenn Sie im Zweifel sind.
  - i. die Sandkörner, die zu einem gegebenen Zeitpunkt von einem bestimmten Bagger in der Schaufel gehalten werden **1**
    - Da jedes Sandkorn ein einzelnes, von den anderen wohlunterschiedenes Objekt ist, ist das eine Menge. Daß wir Schwierigkeiten hätten, ein Sandkorn vom anderen zu unterscheiden, spielt keine Rolle.
  - ii. die Körbe, die gerade Äpfel enthalten, gemeinsam mit den Anzahlen der Äpfel im jeweiligen Korb **1**
    - Ja, eine die (nicht alle!) Körbe und (nicht alle!) natürliche Zahlen enthält.
  - iii. die Wolken am Abendhimmel an einem Tag an einem Ort **1**
    - Eher nicht, denn man kann meist nicht die Wolken klar voneinander unterscheiden. Wo eine aufhört, eine andere anfängt, ist schwierig zu entscheiden. Natürlich könnte es ein Tag sein, an dem beispielsweise nur eine klar umrissene Wolke am Himmel steht . . . – dann schon.
- (b) Nennen Sie alle Untermengen der Menge der Mitglieder Ihrer Logik-Übungsgruppe **1**
  - Zu den Untermengen gehören die leere Menge, die Menge aller Studenten Ihrer Gruppe, alle Zweier- (ggf. auch alle Dreier- und Vierer-) Mengen von Studenten Ihrer Gruppe.

- (c) Betrachten Sie eine Menge mit zwei Elementen:  $K = \{e_1, e_2\}$ .  
Sei  $\mathcal{P}(K)$  die Menge aller Untermengen von  $K$ . Schreiben Sie die Menge  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(K))$  auf.

**3**

- $\mathcal{P}(K) = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(K)) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{e_1\}\}, \{\{e_2\}\}, \{\{e_1, e_2\}\}, \\ \{\emptyset, \{e_1\}\}, \{\emptyset, \{e_2\}\}, \{\emptyset, \{e_1, e_2\}\}, \\ \{\{e_1\}, \{e_2\}\}, \{\{e_1\}, \{e_1, e_2\}\}, \{\{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}, \\ \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}\}, \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_1, e_2\}\}, \\ \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}, \{\emptyset, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}, \\ \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\} \end{array} \right\}$

2. Beweisen Sie, daß es nur eine leere und nur eine universale Menge gibt.

**+4**

- Angenommen, es gäbe zwei leere Mengen. Damit sie sich unterscheiden, müssen sie sich in (mindestens) einem Element unterscheiden. Dann gibt es einen Gegenstand, der Element der einen und nicht der anderen ist. Da leere Mengen kein Element haben, kann das nicht sein. Also gibt es keine zwei leeren Mengen.
- Angenommen, es gäbe zwei universale Mengen. Damit sie sich unterscheiden, müssen sie sich in (mindestens) einem Element unterscheiden. Dann gibt es einen Gegenstand, der Element der einen ist und in der anderen fehlt. Da universale Mengen alle Elemente haben, kann das nicht sein. Also gibt es keine zwei universalen Mengen.
- Ein wenig formaler aufgeschrieben, für den ersten Fall:
  - (a) Sei  $K$  leer,  $L$  leer und  $K \neq L$ . (Annahme)
  - (b) Dann gilt: für kein  $e_i : e_i \in K$  und für kein  $e_i : e_i \in L$ .
  - (c) Außerdem gilt: es gibt ein  $e_i : e_i \in K$  und  $e_i \notin L$  oder es gibt ein  $e_i : e_i \notin K$  und  $e_i \in L$ .
  - (d) Also gibt es ein Element in  $K$ , was zu einem Widerspruch führt, oder ein Element in  $L$ , was zu einem Widerspruch führt.
  - (e) Also ist die erste Annahme falsch, und da  $K$  und  $L$  leer sein sollen, müssen sie identisch sein.

3. (a) Erläutern Sie, welche Mengen durch folgende Relationen beschrieben werden:

i. Mitglied\_Von (einer deutschen Partei, ist gemeint) **1**

- Das ist eine Untermenge des kartesischen Produktes der Menge der Personen und der Menge der deutschen Parteien, und zwar so, daß für jedes Paar in der Menge gilt: die Person ist tatsächlich Mitglied der jeweiligen Partei.

Beispiel für ein Paar:  $\langle \text{Angela Merkel, CDU} \rangle$ .

ii. Mitglied\_Des (eines deutschen Parlamentes, ist gemeint) **1**

- Das ist eine Untermenge des kartesischen Produktes der Menge der Personen und der Menge der deutschen Parlamente, und zwar so, daß für jedes Paar in der Menge gilt: die Person ist tatsächlich Mitglied des jeweiligen Parlamentes.

Beispiel für ein Paar:  $\langle \text{Angela Merkel, Bundestag} \rangle$ .

iii. Mitglied\_Von  $\cap$  Mitglied\_Des **3**

- Das ist die leere Menge. Warum? Schauen Sie auf die Beispielpaare: es gibt offensichtlich kein einziges Paar, was in der ersten und in der zweiten Menge Element ist, da keine Partei ein Parlament ist.

(b) Welche Relation ist hier vermutlich gemeint?

i.  $\{ \langle \text{Eastwood, Dirty Harry} \rangle, \langle \text{Willis, Die Hard} \rangle, \langle \text{Statham, Transporter} \rangle, \dots \}$  **1**

- männlicher\_Hauptdarsteller\_von als Untermenge des kartesischen Produktes der Mengen der Menschen und Filme.

ii.  $\{ \langle \text{Röntgen, 1901, Physik} \rangle, \langle \text{Koch, 1905, Medizin} \rangle, \langle \text{Russell, 1950, Literatur} \rangle, \dots \}$  **2**

- Nobelpreisträger\_im\_Jahre\_für als Untermenge des kartesischen Produktes der Mengen der Menschen, Jahre und Preiskategorien.

(c) Schreiben Sie auf, wie Sie die Relation Wissen mengentheoretisch verstehen.

- Das ist **sehr** schwierig! Es ist eine der großen offenen philosophischen Fragen, ob – und wenn ja, wie – Wissen auf vernünftige und produktive Weise verstanden werden kann. Hier einige Vorschläge, die vielleicht alle irgendwie akzeptabel sind, vielleicht auch ganz oder teilweise aufeinander rückführbar:

- i. als Untermenge des Produktes aus Agenten (Wissens-trägern) und Aussagen (Propositionen). Jemand weiß, daß . . . (und hier folgt eine Aussage wie: es gerade regnet);
- ii. als Untermenge des Produktes aus Agenten und Gegenständen. Jemand weiß, wer oder was . . . (und hier folgt ein Name oder eine Beschreibung wie: der Weihnachtsmann oder das Ding an sich) ist;
- iii. als Untermenge des Produktes aus Agenten und Pro-zuduren, Verfahren oder Programmen. Jemand weiß, wie . . . (und hier folgt eine Fähigkeit wie: Radfahren oder Brückenbauen) zu tun ist.