

5. Übungsblatt

Muß nicht mehr abgegeben werden

Lösung

- Schreiben Sie die Syllogismen FERIO (I. Figur) und FESTINO (II. Figur) auf.

FERIO	FESTINO
MeP	PeM
SiM	SiM
<hr/> SoP	<hr/> SoP

- Finden Sie für jeden dieser Syllogismen ein natürlichsprachliches Beispiel.

FERIO

Kein Säugetier ist Fisch.

Manche Wasserbewohner sind Säugetiere.

Manche Wasserbewohner sind keine Fische.

FESTINO

Kein Fisch ist Säugetier.

Manche Wasserbewohner sind Säugetiere.

Manche Wasserbewohner sind keine Fische.

- Übersetzen Sie die beiden Syllogismen in die Sprache der Prädikatenlogik.

Ich erweitere zunächst die Sprache der Prädikatenlogik durch die Prädikatkonstanten M und S .

FERIO	FESTINO
$\sim \exists x(M(x) \wedge P(x))$	$\sim \exists x(P(x) \wedge M(x))$
$\exists x(S(x) \wedge M(x))$	$\exists x(S(x) \wedge M(x))$
<hr/> $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$	<hr/> $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$

4. Zeigen Sie, daß die Übersetzung der Konklusion der Syllogismen aus den Übersetzungen der Prämissen logisch folgt.

FERIO: Es ist zu zeigen, daß

$$\{\sim\exists x(M(x) \wedge P(x)), \exists x(S(x) \wedge M(x))\} \models \exists x(S(x) \wedge \sim P(x)).$$

Das heißt, es gibt kein Modell und keine Belegung so, daß die Prämissen alle gültig und die Konklusion ungültig im Modell unter der Belegung sind. Angenommen, es gäbe solche:

- | | | |
|----|--|--------------|
| 1. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \sim\exists x(M(x) \wedge P(x))$ | Prämisse |
| 2. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \exists x(S(x) \wedge M(x))$ | Prämisse |
| 3. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$ | Prämisse |
| 4. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists x(M(x) \wedge P(x))$ | 1, \sim |
| 5. | für alle $\mathfrak{v}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_x \not\models M(x) \wedge P(x)$ | 4, \exists |
| 6. | für alle $\mathfrak{v}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_x \not\models S(x) \wedge \sim P(x)$ | 3, \exists |
| 7. | für ein $\mathfrak{v}_x : \mathfrak{M}, \mathfrak{v}_x \models S(x) \wedge M(x)$ | 2, \exists |
- sei das \mathfrak{v}_x aus Zeile 7 fixiert, nennen wir es \mathfrak{v}^* :
- | | | |
|-----|--|---|
| 8. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \not\models M(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \not\models P(x)$ | 5, \wedge , für \mathfrak{v}^* |
| 9. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \not\models S(x)$ oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \models P(x)$ | 6, \wedge , \sim für \mathfrak{v}^* |
| 10. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \models S(x)$ | 7, \wedge |
| 11. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \models M(x)$ | 7, \wedge |
| 12. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \not\models P(x)$ | 8, 11 |
| 13. | $\mathfrak{M}, \mathfrak{v}^* \models P(x)$ | 9, 10 |
| 14. | $\mathfrak{v}^*(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und auch $\mathfrak{v}^*(x) \in \mathfrak{I}(P)$ | 12, 13, Pred, Wspr |

Für FESTINO kann der Beweis der Allgemeingültigkeit von FERIO auf offensichtliche Weise modifiziert werden.

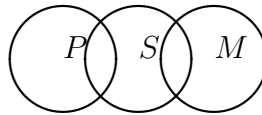
5. Zeigen Sie, daß die Übersetzung der Konklusion der Syllogismen aus den Übersetzungen der Prämissen ableitbar ist.

FERIO: Es ist zu zeigen, daß

$$\{\sim\exists x(M(x) \wedge P(x)), \exists x(S(x) \wedge M(x))\} \vdash \exists x(S(x) \wedge \sim P(x)).$$

- | | | | |
|-----|-------------|--|--|
| 1. | $\{1\}$ | $\sim\exists x(M(x) \wedge P(x))$ | Ann. |
| 2. | $\{2\}$ | $\exists x(S(x) \wedge M(x))$ | Ann. |
| 3. | $\{3\}$ | $S(a) \wedge M(a)$ | Hyp B \exists |
| 4. | \emptyset | $\sim\exists x(M(x) \wedge P(x)) \supset \sim(M(a) \wedge P(a))$ | Theo |
| 5. | \emptyset | $\sim(M(a) \wedge P(a)) \supset \sim M(a) \vee \sim P(a)$ | Theo |
| 6. | $\{1\}$ | $\sim M(a) \vee \sim P(a)$ | 1, 4, 5(2 \times) B \supset |
| 7. | \emptyset | $(\sim M(a) \vee \sim P(a)) \wedge M(a) \supset \sim P(a)$ | Theo |
| 8. | $\{1, 3\}$ | $\sim P(a)$ | 3, 6, 7 B \wedge , E \wedge , B \supset |
| 9. | $\{1, 3\}$ | $S(a) \wedge \sim P(a)$ | 3, 8 B \wedge , E \wedge |
| 10. | $\{1, 3\}$ | $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$ | 9, E \exists |
| 11. | $\{1, 2\}$ | $\exists x(S(x) \wedge \sim P(x))$ | 2, 3, 10, B \exists |

6. Zeichnen Sie die Mengendiagramme der beiden Syllogismen.



Die große Prämisse (beider Syllogismen) läuft darauf hinaus, daß

$$P \cap M = \emptyset.$$

Die kleine Prämisse besagt, daß

$$S \cap M \neq \emptyset.$$

Ob die beiden Mengen $S \cap P$ und $S \cap \text{nicht-}P \cap \text{nicht-}M$ leer sind oder nicht, ist irrelevant. In jedem Fall ist $S \cap M \cap P$ leer und daher gibt es einige S (die nämlich M sind), die nicht P sind.

7. Angenommen, es gilt $\vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$. Erläutern Sie die geltenden Ableitbarkeits- und Folgebeziehungsrelationen und nennen Sie alle Schlußregeln, die aufgrund des Theorems gelten.

$\vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$	Ausgangstheorem
$\vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset B) \dots)$	Bisubj. beweisbar
$A_1 \vdash A_2 \supset (\dots \supset (A_n \supset B) \dots)$	Deduktionstheorem
\vdots	\vdots
$A_1, \dots, A_n \vdash B$	Deduktionstheorem

All dies auch für die Folgebeziehung (\models) anstelle der Ableitbarkeit (\vdash).

$\frac{\Gamma \quad A_1}{\Gamma \quad A_2 \supset (\dots \supset (A_n \supset B) \dots)}$...	$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \quad A_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ \Gamma_n \quad A_n \end{array}}{\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \quad B}$
---	-----	--

ZUSATZ Wie kann FESTINO prädikatenlogisch auf FERIO zurückgeführt werden? Formulieren Sie die entsprechende Regel auch für die traditionelle Logik. Warum braucht die Existenz von *S*-Gegenständen nicht extra gefordert werden?

Über die Kommutativität der Konjunktion beziehungsweise über die Kontrapositionsregel ist das sicher am einfachsten – beides sind einfache aussagenlogische Regeln (oder Theoreme). In der traditionellen Logik kann formuliert werden: *Wenn MeP, dann auch PeM*. Die Existenz von *S*-Gegenständen ist bereits durch die kleine Prämisse gewährleistet.