

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 6. Dezember
(Briefkasten Sekretariat Logik) bis 12:00Uhr

Lösung

1. Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

5

$\perp \{A_1, \dots, A_n, \sim B\}$ genau dann, wenn $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$

Angenommen, $\perp \{A_1, \dots, A_n, \sim B\}$. Dann ist $\{A_1, \dots, A_n\}$ entweder nicht erfüllbar, oder aber erfüllbar. Im ersten Fall gilt $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$, weil es kein Modell gibt, in dem alle $\{A_1, \dots, A_n\}$ gültig und B ungültig wären. Im zweiten Fall gilt $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$, weil $\sim B$ in allen Modellen ungültig sein muß, in denen die $\{A_1, \dots, A_n\}$ gültig sind.

Angenommen, $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$. Dann läßt jedes Modell für $\{A_1, \dots, A_n\}$ die Formel B gültig, also $\sim B$ ungültig, also $\{A_1, \dots, A_n, \sim B\}$ unerfüllbar werden.

2. Erinnern Sie sich?

5



Ist „therefore“ hier eine korrekte logische Folgebeziehung? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Ist es hier nicht. Wäre es das, müßten die Annahmen zum Widerspruch führen:

- (1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \{\forall x(P(x) \supset Q(x)), \exists x(R(x) \wedge Q(x))\}$ Ann.
- (2) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists x(P(x) \wedge R(x))$ Ann.
- (3) für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(R)$ 2gen, kon, pred
- (4) für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{v}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ 1gen, sup, pred
- (5) für ein \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \in \mathfrak{I}(R)$ und $\mathfrak{v}_x(x) \in \mathfrak{I}(Q)$ 1par, kon, pred

Offenbar sind (3)-(5) nicht widersprüchlich: Mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{I}(Q) = \mathfrak{I}(R) = \{d\}$ und $\mathfrak{I}(P) = \emptyset$ sind alle Bedingungen erfüllt. Das wäre eine Welt, in der es nichts (speziell auch keinen Pinguin) gibt außer einer einzigen schwarz-weißen TV-Serie. In dieser Welt sind alle Pinguine schwarzweiß, manche TV-Serien schwarz-weiß aber kein einziger Pinguin eine TV-Serie.

3. Zeigen Sie, daß gilt:

- (a) $\models \forall x \forall y P(x, y) \supset \forall y \exists x P(x, y)$ **3**

Angenommen, es wäre keine Tautologie:

- (1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \forall x \forall y P(x, y) \supset \forall y \exists x P(x, y)$
- (2) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \forall x \forall y P(x, y)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \forall y \exists x P(x, y)$
- (3) für alle \mathfrak{v}_x , für alle \mathfrak{v}_{xy} : $\langle \mathfrak{v}_x(x), \mathfrak{v}_{xy}(y) \rangle \in \mathfrak{I}(P)$ 2gen, gen, pred
- (4) für ein \mathfrak{v}_y , für alle \mathfrak{v}_{yx} : $\langle \mathfrak{v}_{yx}(x), \mathfrak{v}_y(y) \rangle \notin \mathfrak{I}(P)$ 2par, gen, pred

Da 3 für alle x -Versionen und für alle xy -Versionen dieser x -Versionen gilt, kann für $\mathfrak{v}_{xy}(y)$ im Einzelfall auch der Wert $\mathfrak{v}_y(y)$ gesetzt werden – damit ergibt sich ein Widerspruch zwischen 3 und 4.

Welche Folgebeziehung läßt sich behaupten, weil die Formel allgemeingültig ist? **2**

$$\forall x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$$

(b) $\{P(a), Q(b), \exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \supset R(c_1)\} \models R(c_1) \vee R(c_2)$

3

Angenommen, es würde nicht folgen:

- (1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models P(a), \mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models Q(b)$
und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \supset R(c_1)$
- (2) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models R(c_1) \vee R(c_2)$
- (3) $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(P)$ 1pred
- (4) $\mathfrak{I}(b) \in \mathfrak{I}(Q)$ 1pred
- (5) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists xP(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists xQ(x)$; oder $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models R(c_1)$ 1sub,adj
- (6) für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ und für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(Q)$;
oder $\mathfrak{I}(c_1) \in \mathfrak{I}(R)$ 5par,pred
- (7) $\mathfrak{I}(c_1) \in \mathfrak{I}(R)$ (3 oder 4) und 6
- (8) $\mathfrak{I}(c_1) \notin \mathfrak{I}(R)$ 2adj

Zur Herleitung des Widerspruchs braucht man 3 oder 4, wegen der Monotonie der Folgebeziehung reicht das aus, die Behauptung als gültig zu zeigen. Man benötigt also nicht alle Prämissen.

Nennen Sie zwei Tautologien, die mit dieser Folgebeziehung bildbar sind.

2

$$P(a) \wedge Q(b) \wedge (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \supset R(c_1)) \supset R(c_1) \vee R(c_2)$$

$$P(a) \supset (Q(b) \supset (\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \supset R(c_1) \supset R(c_1) \vee R(c_2)))$$

(c) $\forall xP(x) \approx \sim \exists x \sim P(x)$

3

Angenommen, die Formeln wären nicht äquivalent:

- i. (1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \forall xP(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \sim \exists x \sim P(x)$
(2) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \exists x \sim P(x)$ 1neg
(3) für ein \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ 2par,neg,pred
(4) für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ 1gen
- ii. (1) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \forall xP(x)$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \models \sim \exists x \sim P(x)$
(2) für ein \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \notin \mathfrak{I}(P)$ 1gen
(3) $\mathfrak{M}, \mathfrak{v} \not\models \exists x \sim P(x)$ 1neg
(4) für alle \mathfrak{v}_x : $\mathfrak{v}_x(x) \in \mathfrak{I}(P)$ 3par,neg,pred

Bilden Sie eine allgemeingültige Formel und eine korrekte Folgebeziehung aufgrund dieser Behauptung einer Äquivalenz.

2

$$\forall xP(x) \supset \sim \exists x \sim P(x)$$

$$\forall xP(x) \models \sim \exists x \sim P(x)$$

- (d) $\perp \{P(a) \vee Q(a), P(a) \supset R(a), Q(a) \supset R(a), \sim R(a)\}$

3

Angenommen, es gibt ein Modell was die Formelmenge erfüllen würde:

- (1) $\mathfrak{M} \models P(a) \vee Q(a), \mathfrak{M} \models P(a) \supset R(a), \mathfrak{M} \models Q(a) \supset R(a),$
 $\mathfrak{M} \models \sim R(a)$
- (2) $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(Q)$ 1adj,pred
- (3) $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ oder $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(R)$ 1sub,pred
- (4) $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(Q)$ oder $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(R)$ 1sub,pred
- (5) $mfI(a) \notin \mathfrak{I}(R)$ 1neg,pred
- (6) $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(P)$ und $\mathfrak{I}(a) \notin \mathfrak{I}(Q)$ 3,4,5

Der Widerspruch ist zwischen 2 und 6, somit kann es kein alle Formeln erfüllendes Modell geben und damit ist die Formelmenge nicht erfüllbar.

Schreiben Sie drei Folgebeziehungen auf die Sie behaupten können, weil die Menge nicht erfüllbar ist.

2

- $\{P(a) \vee Q(a), P(a) \supset R(a), Q(a) \supset R(a), \} \models R(a)$
- $\{P(a) \supset R(a), Q(a) \supset R(a), \sim R(a)\} \models \sim(P(a) \vee Q(a))$
- $\{P(a) \vee Q(a), P(a) \supset R(a), \sim R(a)\} \models \sim(Q(a) \supset R(a))$

ZUSATZ Überlegen Sie, ob folgender Satz gilt:

5

Sei $\{P_i\}$ die Menge, die aus allen Formeln $P(a_1), \dots P(a_i), \dots$ für alle Individuenkonstanten der Sprache besteht. Dann

$$\{P_i\} \models \forall x P(x)$$

Beweisen Sie Ihre Antwort.

Nein, der Satz gilt nicht. Zunächst kann man in allen Modellen, in denen \mathfrak{D} mehr als ein Element enthält, alle Individuenkonstanten auf ein Element interpretieren und $\mathfrak{v}_x(x)$ einen anderen Wert geben. Bei passend gewählter Interpretation von P wird das zu einem Gegenmodell. Weiterhin, selbst wenn alle Individuenkonstanten verschieden interpretiert sind, so sind es doch nur abzählbar viele – und es kann überabzählbar große Modelle geben.