

## Berichtigung zu einer Folie in einer Vorlesung



USche

$$\vdash \forall x \sim P(x) \supset \sim \exists x P(x)$$

1.	{1}	$\forall x \sim P(x)$	HypE $\supset$
2.	{2}	$\exists x P(x)$	HypE $\sim$
3.	{3}	$P(a)$	HypB $\exists$
4.	{1}	$\sim P(a)$	1B $\forall$
5.	{5}	$P(a)$	HypE $\supset$
6.	{6}	$\sim P(a)$	HypE $\supset$
7.	{7}	$\sim(P(b) \wedge \sim P(b))$	HypE $\sim$
8.	{5, 6}	$P(b) \wedge \sim P(b)$	E $\sim$ 5, 6, 7B $\sim$
9.	$\emptyset$	$P(a) \supset (\sim P(a) \supset P(b) \wedge \sim P(b))$	2 $\times$ E $\supset$ 5, 6, 8
10.	{1, 3}	$P(b) \wedge \sim P(b)$	2 $\times$ B $\supset$ 3, 4, 9
11.	{1, 2}	$P(b) \wedge \sim P(b)$	B $\exists$ 2, 3, 10
12.	{1, 2}	$P(b)$	B $\wedge$
13.	{1, 2}	$\sim P(b)$	B $\wedge$
14.	{1}	$\sim \exists x P(x)$	E $\sim$ 2, 12, 13
15.	$\emptyset$	$\forall x \sim P(x) \supset \sim \exists x P(x)$	E $\supset$

**Kommentar.** Mit den ersten beiden Zeilen wird eine Struktur geschaffen, die einer Ableitung mit indirektem Beweis entspricht: Die erste Hypothese ist die Annahme der Ableitung, die zweite die des indirekten Beweises. Die Zeilen 5–9 (und insbesondere die drei Hypothesen darin) stellen nur sicher, daß in der neunten Zeile wirklich ein *Theorem* steht. Es besagt soviel wie: Aus einem Widerspruch folgt alles. Das entspricht folgendem Theoremschema und folgender Regel:

$$A \supset (\sim A \supset B) \quad \frac{\Gamma \quad A \quad \Delta \quad \sim A}{\Gamma, \Delta \quad B}$$

Die Verwendung des einen oder der anderen verkürzt den Beweis beträchtlich. In Zeile 11 wird die Abhängigkeit von der Wahl der Konstanten in Zeile 3 beseitigt, dafür kauft man die von Hypothese 2 ein. 14 und 15 beseitigen die Abhängigkeit von den Hypothesen.