EINFÜHRUNG
PHILOSOPHIE

Niko Strobach

Einführung in die Logik

2005

WISSENSCHAFTLICHE
BUCHGESELLSCHAFT
WBG
WISSENVERBINDET

3. Das Spiel AL

In diesem Kapitel geht es darum, das völlig sinnfreie Spiel AL kennenzulernen. Um die Spielregeln von AL verstehen zu können, ist es zunächst nötig, sich einige wenige fundamentale Begriffe der Mengenlehre klar zu machen (3.1). Durch die Spielanleitung für AL (3.2) ergibt sich, was wohlgeformte Formeln von AL sind und wie man ihnen die Farben Schwarz und Weiß zuordnet. In den Abschnitten 3.3 bis 3.6 geht es um die Theorie von AL, besonders um Methoden zur Beantwortung der Frage, ob eine Formel AL-allgemeingültig (immer schwarz) ist.

3.1 Zu Beginn etwas Mengenlehre

In diesem Kapitel geht es um ein völlig sinnfreies Spiel mit dem Namen „AL". Auch der Name „AL" hat keinerlei tiefere Bedeutung. AL ist allein durch eine Spielanleitung definiert, die aus vier Definitionen besteht. Um diese Spielanleitung zu verstehen, muss man drei elementare Begriffe der Mengenlehre kennen: Menge, Tupel, Funktion.

Menge

Auf meinem Schreibtisch befinden sich im Moment ein Stift, eine Kaffeetasse und eine Uhr. Irgendwie ist damit, dass diese drei Gegenstände sich dort befinden, auch die *Menge* gegeben, die aus genau diesen drei Gegenständen besteht. Damit sind bereits extrem schwierige philosophische Fragen aufgeworfen wie: Befindet sich diese Menge ebenfalls auf meinem Schreibtisch, befindet sie sich anderswo oder befindet sie sich nirgendwo? Gibt es sie noch, wenn sich die Uhr im Wohnzimmer, die Tasse in der Küche und der Stift in der Mülltonne befindet? Gibt es sie, auch wenn niemand je an sie denkt? Diese Fragen müssen hier zum Glück nicht weiter interessieren. Es genügt, festzuhalten: Es gibt sie. Irgendwie. Und der Stift, die Kaffeetasse und die Uhr, und sonst nichts, sind ihre *Elemente*.

Wenn man sich über diese Menge äußern will, muss man sie so beschreiben, dass klar ist, welche Gegenstände ihre Elemente sind und welche nicht. Dazu gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: (1) Man beschreibt die Menge, indem man erwähnt, was auf die Elemente und nur die Elemente der Menge zutrifft („die Menge der mittelgroßen physikalischen Objekte auf Strobachs Schreibtisch am 16.11.04"). (2) Man beschreibt die Menge durch Aufzählung ihrer Elemente mittels Namen oder eindeutiger Beschreibungen, die durch Kommas getrennt sind und umrahmt sind von *geschweiften Klammern* („{Uhr, Stift, Tasse}"). Dass ein Gegenstand Element einer Menge ist, drückt man durch das Zeichen „∈" aus („Tasse ∈ {Uhr, Stift, Tasse}").

Die Gegenstände, aus denen sich Mengen zusammensetzen, müssen nicht sehr handfest sein. Es reicht, dass es sie gibt. Es kann sich z.B. auch um Zahlen handeln. Es gibt unendlich große Mengen, z.B. die Menge der natürlichen Zahlen. Will man sie in geschweiften Klammern *beschreiben*, so ist man gezwungen, die Aufzählung irgendwann abzubrechen und Auslassungspunkte zu setzen („{1, 2, 3 ...}"). Das heißt aber nicht, dass die Menge selbst unvollständig wäre. Es gibt sie, und sie hat unendlich viele Elemente. Die Einsicht, dass man mit solchen Mengen umgehen kann und

dass es sogar unendlich große Mengen unterschiedlicher „Größe" (Mächtigkeit) gibt, geht auf den Begründer der Mengenlehre, den Mathematiker Georg Cantor, zurück (145).

Tupel

Die Frage, in welcher *Reihenfolge* die Elemente einer Menge in ihr vorkommen, hat keinen Sinn: {Uhr, Stift, Tasse} ist dieselbe Menge wie {Stift, Tasse, Uhr}. Ihre Identität ist allein dadurch bestimmt, welche Elemente zu ihr gehören. Anders ist es beim sogenannten *Tupel*. Grob gesagt ist ein Tupel eine Menge mit eingebauter Reihenfolge der Elemente. Wie man eine solche Reihenfolge erzeugt, spielt hier keine Rolle (es gibt verschiedene Verfahren, vgl. z.B. 41, §53). Tupel notiert man, im Gegensatz zu bloßen Mengen, in *eckigen Klammern*. Das einfachste denkbare Tupel, das nur aus *einem* Element besteht (z.B. ⟨Tasse⟩), setzt man üblicherweise mit diesem Element selbst gleich. Das in der Anwendung wichtigste Tupel ist das Zweiertupel, das man üblicherweise als *geordnetes Paar* bezeichnet. An ihm sieht man, dass es beim Tupel auf die Reihenfolge ankommt: ⟨1,2⟩ ist nicht dasselbe geordnete Paar wie ⟨2,1⟩. Denn im ersten Fall ist 1 die erste und 2 die zweite Komponente, im zweiten Fall ist es umgekehrt. Im Gegensatz dazu ist {1,2} dieselbe Menge wie {2,1}. Es gibt auch Dreiertupel (sogenannte Tripel, z.B. ⟨Tasse, Stift, Uhr⟩), es gibt Vierertupel etc.

Funktion

Als dritter Begriff nach „Menge" und „Tupel" ist noch der Begriff der *Funktion* zu klären. Man kann sich eine Funktion als einen Gegenstand vorstellen, der etwas gibt und etwas nimmt. So nimmt etwa die Funktion $F(x)=x^2$ Zahlen und gibt Zahlen. Sie gibt nämlich zu jeder Zahl, die sie nimmt, genau eine Zahl wieder her: deren Quadrat. Das, was eine Funktion nimmt, heißt (in dieser Rolle) verwirrenderweise Argument. Dieser Gebrauch des Wortes „Argument" im Zusammenhang mit Funktionen hat mit dem Argumentieren nichts zu tun. Was die Funktion gibt, heißt (in dieser Rolle) Funktionswert. So gibt z.B. die Funktion $F(x)=x^2$ für das Argument 2 den Funktionswert 4. Für jede (reelle) Zahl als Argument gibt sie einen Funktionswert in Form einer (reellen) Zahl: Die Menge der reellen Zahlen ist ihr Argumentbereich, und die Menge der reellen Zahlen ist zufällig auch ihr Wertebereich. Es ist aber für eine Funktion nicht zwingend, dass Argumentbereich und Wertebereich identisch sind. Dasselbe Argument kann nie mehrere verschiedene Funktionswerte haben. Es können aber mehrere Argumente denselben Funktionswert haben. Die Funktion $F(x)=x^2$ selbst ist nicht mit ihrem Graphen, der Normalparabel, zu verwechseln. Manche Funktionen sind mit *einem* einfachen Gegenstand nicht zufrieden: Die Funktion + nimmt gleich ein Paar von Zahlen (die Summanden) und gibt eine Zahl (die Summe). Sie ist eine *zweistellige* Funktion. Sich Funktionen als kleine nehmende und gebende Monster vorzustellen, ist zu Beginn hilfreich. Es gibt aber auch eine etwas weniger pittoreske Art, sie zu beschreiben. Eine Funktion lässt sich nämlich einfach beschreiben als eine Menge von geordneten Paaren. Die jeweils erste Komponente eines geordneten Paars darin ist das Argument, die jeweils zweite der dazu gehörende Funktionswert. Diese Menge kann unendlich groß sein. Das ist bei $F(x)=x^2$ der Fall, denn diese Funktion lässt sich auffassen als

$$\{\langle 0,0\rangle, \langle 1/3,1/9\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle \sqrt{2},2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,16\rangle \ldots\}.$$

Die jeweils zweite Komponente eines Paares ist in unserem Beispiel ja immer das Quadrat seiner jeweils ersten Komponente. Entsprechend lässt sich die Funktion + notieren als $\{\langle\langle 0,0\rangle, 0\rangle, \langle\langle 1,1\rangle, 2\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, 3\rangle \ldots\}$. Nicht jede Menge von geordneten Paaren ist eine Funktion. Die Menge $\{\langle 2,4\rangle, \langle 2,8\rangle\}$ kann z.B. keine Funktion sein, weil dann an das Argument 2 zwei verschiedene Funktionswerte vergeben wären; das ist aber für eine Funktion per Definition ausgeschlossen.

Funktionen müssen nicht unbedingt Zahlen geben und nehmen bzw. Mengen von geordneten Paaren von *Zahlen* sein. Alle anderen Sorten von Gegenständen sind genauso gut möglich. An Beispielen dafür wird es nicht fehlen.

Übungen

1) Lesen Sie vor: [1] $a \in \{a,b\}$ [2] $a \in \{b,c\}$ [3] $a \in \langle b,a\rangle$ [4] $a \in \{b,a\}$ [5] $\{a,b,c\}$ [6] $\langle a,b,c\rangle$ [7] $\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$ [8] $\{b,c,a\}$ [9] $\langle b,c,a\rangle$ [10] $\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle\}$ [11] $\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ [12] $\{\langle\langle 1,1\rangle,1\rangle, \langle\langle 2,2\rangle,4\rangle, \langle\langle 2,3\rangle,6\rangle\ldots\}$ [13] $\{a\}$ [14] $\{\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$.
2) Welche der Ausdrücke ([1], [2] etc.) sind wahr bzw. falsch?
3) Welche Ausdrücke bezeichnen dasselbe?
4) Welche Ausdrücke bezeichnen Funktionen?

3.2 Die Spielanleitung für AL

Mit den mengentheoretischen Grundbegriffen ist es nun möglich, die Spielanleitung für das Spiel AL zu verstehen. Sie besteht aus ganzen vier Definitionen. Jede einzelne der Definitionen ist erklärungsbedürftig und wird im Folgenden ausführlich erklärt werden.

<u>Definition 1: „Alphabet von AL“</u>
Das Alphabet von AL ist die Menge { p, ~, ∧, *,), (}.

<u>Definition 2: „Atomare Formel von AL“</u>
1. „p“ ist eine atomare Formel von AL.
2. Wenn α eine atomare Formel von AL ist, dann ist auch ⌜α *⌝ eine atomare Formel von AL.
3. Nichts sonst ist eine atomare Formel von AL.

<u>Definition 3: „Wohlgeformte Formel von AL“ („wff“)</u>
1. Jede atomare Formel von AL ist eine wohlgeformte Formel von AL.
2. Wenn α eine wohlgeformte Formel von AL ist, dann auch ⌜~ α⌝.
   Wenn α und β wohlgeformte Formeln von AL sind, dann ist auch ⌜(α ∧ β)⌝ eine wohlgeformte Formel von AL.
3. Sonst ist nichts eine wohlgeformte Formel von AL.

<u>Definition 4: „AL-Modell“ (auch: „AL-Interpretation“)</u>
Ein AL-Modell ist eine Funktion V, die jeder wff von AL ein Element aus {●,○} zuordnet, wobei die folgenden einschränkenden Bedingungen gelten:
1. V(⌜~ α⌝) = ● gdw V(α) = ○.
2. V(⌜(α ∧ β)⌝) = ● gdw sowohl V(α) = ● als auch V (β) = ●.

Syntax und Semantik

Regeln wie die Definitionen 1 bis 3, die sich nur mit der Form von Zeichenfolgen beschäftigen, nennt man auch syntaktische Regeln. Sie geben die Syntax an (von gr. syn = zusammen, taxis = Ordnung). Die Definition 4 dagegen beschäftigt sich nicht mit der Syntax von AL, sondern damit, was wffs von AL – in einem sehr abstrakten Sinn – *bedeuten*. Es handelt sich bei ihr um den semantischen Teil bzw. die (formale) *Semantik* von AL (von gr. semainein = bedeuten, bezeichnen).

Syntax von AL

Zunächst zur Syntax, und dabei zunächst zu Definition 1. Sie hält fest: Das Spiel AL setzt eine sehr begrenzte Menge von leicht beschaffbaren und unterscheidbaren Spielelementen voraus. Diese Spielelemente sind üblicherweise regelmäßig geformte Tintenspuren auf Papier (Druckerschwärze soll dabei als eine Art Tinte zählen). Man kann AL aber auch als Kartenspiel spielen. Um zu verstehen, wie dieses Spiel funktioniert, ist es zu Beginn sogar sehr zweckmäßig, sich die Spielelemente von AL als Spielkarten vorzustellen, auf denen sich der Buchstabe „p“, ein hochgestellter Stern, eine Tilde („~“) das Zeichen „∧“oder Klammern befinden können. Im Folgenden wird von dieser Veranschaulichung hemmungslos Gebrauch gemacht. Die Übertragung auf Tintenspuren macht keinerlei Probleme. Sie haben *an sich* ebenso wenig eine Bedeutung wie die Spielkarten.

Winkelklammern

Was besagt Definition 2? Die ungewöhnlichen Winkelklammern sind einfach eine Abkürzung für die Wendung „das Ergebnis des Hinlegens bzw. Hinschreibens von“. So heißt, wenn man an Spielkarten denkt, „⌜α*⌝“ einfach soviel wie „das Ergebnis des Hinlegens von α und – unmittelbar rechts davon – einer Sternkarte“. Doch was bedeutet das Alpha?

Griechische Buchstaben sind reine Platzhalter für Zeichenketten. In AL-Formeln selbst kommen *nie* griechische Buchstaben vor. Sie sind nur ein Mittel, um sich *über* AL-Formeln zu verständigen. Man könnte sogar auf sie verzichten, wie die folgende Version der Klausel 2 von Definition 2 zeigt. Sie besagt nämlich ganz dasselbe. Nur ist sie viel umständlicher: „Wenn *irgendeine Kartenfolge* aus AL-Karten (im Extremfall: eine einzige Karte) eine atomare Formel von AL ist, dann ist auch diejenige neue Kartenfolge, die entsteht, indem man dieser Kartenfolge an ihrem rechten Rand eine Sternkarte hinzufügt, eine atomare Formel von AL.“

Rekursive Definitionen

Bloß wird man den Eindruck haben, dass die Klausel etwas in der Luft hängt: Um damit etwas anfangen zu können, muss man ja schon wissen, ob man eine atomare Formel vor sich hat! *Allein* mit dieser Klausel bekommt man also keine vernünftige Definition. Aber sie ist durch die erste Klausel von Definition 2 geerdet. Die hält nämlich einfach erst einmal fest, dass eine „p“ -Karte eine atomare Formel ist. Habe ich die Kartenfolge

$$\boxed{p}\boxed{*}\boxed{*}$$

vor mir und frage mich, ob es sich um eine atomare Formel von AL handelt, so erfahre ich aus Definition 2.2: Es handelt sich um eine atomare Formel von AL, *wenn* es sich bei

$$\boxed{p}\boxed{*}$$

um eine atomare Formel handelt. Diese Kartenfolge wiederum ist nach Definition 2.2 eine atomare Formel von AL, *wenn* es sich bei

$\boxed{p}$

um eine atomare Formel handelt. Nun ergibt Definition 2.1, dass es sich dabei tatsächlich um eine atomare Formel handelt. Also ist eine Karte mit dem Zeichen „p" darauf, der zwei Sternkarten folgen, ebenfalls eine atomare Formel von AL. Man nennt diese Art der Definition rekursive Definition („rekursiv" heißt wörtlich „rücklaufend"; manchmal findet man auch den Ausdruck „induktive Definition"). Man kann Klausel 1 die Basisklausel, Klausel 2 die Rekursionsklausel und Klausel 3 die Abschlussklausel nennen. Rekursive Definitionen ermöglichen eine Flexibilität beim Definieren, die vor ihrer Erfindung undenkbar war. Denn sie können eine unendliche Vielfalt von Gestalten ordnen.

Anführungszeichen

Bevor sich Definition 3 erklären lässt, soll für den Rest des Buchs eine Vereinbarung darüber getroffen werden, wie Aussagen *über* konkrete Zeichenfolgen notiert werden sollen. Die Vereinbarung lautet:

Wenn etwas *über* eine konkrete Zeichenfolge ausgesagt wird, so wird diese in Anführungszeichen gesetzt.

Eine Zeichenfolge kann im Extremfall aus einem einzigen Zeichen bestehen; es gibt dafür keinen tieferen Grund, außer dass es am bequemsten ist, das Wort „Folge" so zu definieren. Die getroffene Vereinbarung ist schon deshalb sinnvoll, weil das Abbilden von Kartenfolgen in einer Spielanleitung drucktechnisch aufwändig ist und viel Platz schluckt. Außerdem spielt man AL eben oft auch mit Tintenspuren auf Papier, und da sind die Anführungszeichen sogar unverzichtbar. Ihr Fehlen würde nämlich zu heilloser Verwirrung führen. Denn wie wollte man sonst eine Tintenspur von einem mit Tinte erzeugten Bild dieser Tintenspur unterscheiden?

wff

Außerdem sei vereinbart, dass für den sehr häufigen Ausdruck „wohlgeformte Formel" die übliche Abkürzung „wff" („well-formed formula") benutzt werden soll.

Nun zu Definition 3. Man sieht schnell, dass sie genau so aufgebaut ist wie Definition 2, es sich also wieder um eine rekursive Definition handelt.

Ist „(~p ∧ (p ∧ p*))" eine wff von AL? „~p" müsste dann das α aus Def. 3.2 konkretisieren, „(p ∧ p*)" das β. Also ist „(~p ∧ (p ∧ p*))" laut Def.3.2 eine wff von AL, *wenn* „~p" eine wff von AL ist und „(p ∧ p*)" eine wff von AL ist. Ist „~p" eine wff von AL? Laut Def. 3.2 ja, wenn „p" eine wff von AL ist. Ist „(p ∧ p*)" eine wff von AL? Ja, wenn sowohl „p" als „auch „p*" eine ist. Sind „p" und „p*" wffs von AL? Ja, wenn es sich bei „p" und „p*" um atomare Formeln handelt, wie aus Def. 3.1 hervorgeht. Ist „p*" eine atomare Formel? Ja, wenn „p" eine ist (Def. 2.2). Ist „p" eine? Ja, wie Def. 2.1 bestätigt.

Semantik von AL

Damit ist zur Syntax von AL alles gesagt, und es fragt sich, was die Definition 4 bedeutet, die die gesamte Semantik von AL enthält. Die Idee ist: Wffs von AL können Farben haben. Sie können nämlich schwarz oder weiß sein. Das sollen die schwarzen und weißen Kreise ausdrücken: Sie repräsentieren die möglichen Farben von Formeln. Ein AL-Modell ist nun nichts anderes als eine konkrete Farbverteilung für alle wffs von AL. „V(α) = ●" heißt: „V ordnet der wff α von AL die Farbe Schwarz zu" oder, einfacher: „α ist (in Bezug auf V) schwarz". Und „V(α) = ○" heißt: „V ordnet der wff α von AL die Farbe Weiß zu" oder, einfacher: „α ist (in Bezug auf V) weiß". AL-Modelle sind ein erstes Beispiel für Funktionen, die nichts mit Zahlen zu tun haben. Wenn es sich bei einer Funktion V um ein AL-Modell handelt, so ist der Argumentbereich von V die Menge aller wffs von AL. Das ist eine unendlich große Menge, denn der Komplexität und Länge von AL-Formeln ist ja durch die syntaktischen Definitionen keine Grenze gesetzt. Der Wertebereich von V ist dagegen in diesem Fall sehr überschaubar. Er besteht nur aus zwei Elementen. Ein AL-Modell sieht demnach z.B. so aus:

V = { ⟨ p, ●⟩, ⟨ p*, ○⟩, ⟨ ~p, ○⟩, ⟨ (p ∧ p*), ○⟩... }.

Die *ganze* Funktion V so zu notieren, ist unmöglich, da es unendlich viele wffs von AL gibt. Das macht aber nichts. Denn die Farbe einer wff α von AL wird nur von den Farben derjenigen *atomaren* Formeln beeinflusst, die in α selbst vorkommen (allgemein dazu: 95, S.416). Die Farbverteilung für *atomare* Formeln unterliegt keinerlei Einschränkung: Auf die atomaren Formeln können die zwei Farben völlig willkürlich verteilt werden. Definition 4 ist wieder eine rekursive Definition, denn um die Farbe einer komplexen wff zu ermitteln, muss man von den Farben der darin enthaltenen atomaren Formel(n) aus Schritt für Schritt vorgehen.

Die Tilde („~")

Die erste einschränkende Bedingung in Definition 4 bezieht sich auf Formeln mit einer Tilde am Anfang. Sie bewirkt Folgendes: ⌜~ α⌝ muss immer die entgegengesetzte Farbe von α bekommt und umgekehrt. So muss, wenn „p" schwarz ist, „~p" weiß sein, und wenn „~p" schwarz ist, „p" weiß. {⟨ p, ●⟩, ⟨ ~p, ●⟩ ...} wäre *kein* AL-Modell, {⟨ p, ○⟩, ⟨ ~p, ○⟩ ...} auch nicht. Die Tilde kann man sich daher als Farbvertauscher merken.

Der Hut („∧")

Die zweite einschränkende Bedingung in Definition 4 bezieht sich auf Formeln mit „∧" in der Mitte. Sie bewirkt Folgendes: ⌜(α ∧ β)⌝ kann nur schwarz sein, wenn beide Komponenten, also α und β, schwarz sind. Wenn nur „p" schwarz ist und „p*" nicht, dann ist „(p ∧ p*)" nicht schwarz, sondern weiß; wenn beide Komponenten weiß sind, erst recht. {⟨ p, ●⟩, ⟨ p*, ○⟩, ⟨ (p ∧ p*), ●⟩ ...} wäre *kein* AL-Modell.

Die anderen Junktoren

Damit ist zu den Definitionen, die das Spiel AL charakterisieren, eigentlich schon alles gesagt. Allerdings ist das Legen längerer Folgen von Spielkarten ziemlich mühsam. Es ist daher üblich, einige Zeichenfolgen von AL abzukürzen. Man kann sich das so vorstellen, dass man einige Zusatzkarten bastelt, nämlich solche mit „q", „r", „s", „∨", „→", „≡" und „∇" darauf. Die folgende Zusatzdefinition legt fest, wie sie eingesetzt werden dürfen:

AL-Zusatzdefinition 1 Eine atomare Formel von AL darf mit „q", „r" oder „s" abgekürzt werden. AL Zusatzdefinition 2 Seien α und β wffs von AL. 1. ⌜~ (~α ∧ ~β)⌝ darf durch ⌜(α ∨ β)⌝ abgekürzt werden. 2. ⌜~ (α ∧ ~ β)⌝ darf durch ⌜(α → β)⌝ abgekürzt werden. 3. ⌜((α → β) ∧ (β → α))⌝ darf durch ⌜(α ≡ β)⌝ abgekürzt werden. 4. ⌜((α ∨ β) ∧ ~ (α ∧ β))⌝ darf durch ⌜(α ∇ β)⌝ abgekürzt werden.

Die erste Zusatzdefinition erspart es einem, bei der Anwendung mit „p****", „p******" und Ähnlichem hantieren zu müssen. „q*" (etc.) ist natürlich wieder eine atomare Formel von AL, denn man kann auf „q" wieder Definition 2 anwenden.

Weil die neuen Zeichen nur abkürzenden Charakter haben, ergibt sich aus der zweiten Zusatzdefinition sofort die folgende Beobachtung zur Definition der wff: Wenn α und β wffs von AL sind, so auch $\ulcorner(\alpha \to \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ und $\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner$. Schon allein von der Syntax her liegt es nahe, „→", „∧", „∨", „∇" und „≡" zusammenfassend als „Verbinder" (lat.: „Junktoren") zu bezeichnen. Etwas inkonsequent bezeichnet man auch „~" als Junktor. Zur Not mag man sagen: Die Tilde verbindet eine wff mit sich selbst.

Um über AL-Kartenfolgen sprechen und diese buchstabieren zu können, ist es gut, festzulegen, wie die Junktoren heißen. Sie sollen deshalb *vorläufig* wie folgt gelesen werden (die offiziellen Namen haben Zeit bis Kap. 3.5):

„~" = „Tilde" „→" = „Pfeil" „∇" = Dreieck
„∧"= „Hut" „∨" = „Tüte" „≡" = „Spaghetti".

Oft findet man das Zeichen „⊃" statt „→", das Zeichen „¬" oder „–" an Stelle von „~", leere Karten oder Karten mit „." statt Karten mit „∧", „↔" oder „⇔" statt „≡" sowie kleine hochgestellte Häkchen statt Sterne. Das ist genauso unwichtig wie die Art, wie der König oder der Springer eines Schachspiels geschnitzt sind. Allein darauf, wie man mit der Figur umgeht, kommt es an.

Die neu definierten Junktoren haben interessante semantische Eigenschaften. Aus der Zusatzdefinition 2 folgt nämlich: Die Farben der Komponenten, die durch sie verbunden werden, müssen jeweils ganz bestimmte Bedingungen erfüllen, damit die ganze Verbindung schwarz wird.

$V(\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner)$ = ●	gdw mindestens einer der folgenden Fälle vorliegt:
	1) $V(\alpha)$ = ●
	2) $V(\beta)$ = ●;
$V(\ulcorner(\alpha \to \beta)\urcorner)$ = ○	gdw $V(\alpha)$ = ● und $V(\beta)$ = ○;
$V(\ulcorner(\alpha \nabla \beta)\urcorner)$ = ●	gdw $V(\alpha) \neq V(\beta)$;
$V(\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner)$ = ●	gdw $V(\alpha) = V(\beta)$.

Bei der Tüte können demnach auch beide Fälle zusammen vorliegen (schwarz und schwarz ergibt schwarz). Die Klausel für den Pfeil ist kein Druckfehler: Es ist tatsächlich einfacher, sie ausgehend von dem *einen* Fall zu formulieren, in dem eine Formel mit Pfeil weiß wird, statt alle drei Fälle aufzuzählen, in denen sie schwarz wird. Weichen die Farben der Komponenten einer Spaghetti-Verbindung voneinander ab, so wird das Ergebnis weiß. Bei der Dreiecks-Verbindung ist es umgekehrt.

Übungen

1) Handelt es sich im Folgenden a) um Folgen von AL-Spielelementen b) um atomare Formeln von AL c) um wffs von AL d) um nichts davon?

[1] $((\% \to \#) \to {\sim}(p \vee q))$ [2] $)p \to q($ [3] $(p \vee q)$ [4] (p)
[5] ${\sim}(r)$ [6] ${\sim}(\alpha \wedge {\sim}\alpha)$ [7] $p*****$ [8] $*r$
[9] $((x = x) \to (p \vee {\sim}p))$ [10] q [11] $(p \wedge {\sim}p)$ [12] $((r \equiv r) \to s)$
[13] $((p \to \alpha) \vee (p \to {\sim}\alpha))$ [14] $(((p \to q^*) \wedge p) \to q^*)$

2) Sei V = { ⟨p, ●⟩, ⟨q, ○⟩, ⟨r, ○⟩, ⟨s, ●⟩, ... }.
Welche Farbe haben die folgenden wffs von AL in Bezug auf V?
[1] s [2] ${\sim}r$ [3] ${\sim}(q \wedge {\sim}r)$ [4] $(p \vee {\sim}q)$ [5] $(r \to s)$
[6] $((r \equiv r) \to q)$ [7] $({\sim}(r \vee s) \wedge (p \wedge {\sim}p))$ [8] ${\sim}((r \vee s) \wedge (p \wedge {\sim}p))$
[9] $((p \to r) \to s)$ [10] ${\sim}{\sim}{\sim}{\sim}q$

3) Bestimmen Sie, soweit benötigt, V(p), V(q), V(r) und V(s) für jede Zeile neu durch das Werfen einer Münze (Kopf = ●, Zahl = ○ !) und bestimmen Sie danach neuerdings die Farben der Formeln 1 bis 10.

4) Verwenden Sie das Münzwurf-Verfahren auch für die folgenden Formeln. Bestimmen Sie dann bei diesen acht Formeln, welche Farbe die Formel jeweils gehabt hätte, wenn die Münze anders gefallen wäre, als sie tatsächlich gefallen ist.
[1] $(p \wedge {\sim}p)$ [2] $(p \wedge p)$ [3] ${\sim}(p \vee {\sim}p)$ [4] $(p \vee {\sim}p)$
[5] ${\sim}(p \wedge {\sim}p)$ [6] $(p \to p)$ [7] $(p \vee p)$ [8] ${\sim}(r \equiv r)$

3.3 Die Theorie des Spiels AL, erster Teil (Farbtabellen)

„allgemeingültig", „widersprüchlich", „erfüllbar"

Manche Spiele geben Anlass zu ausführlicher theoretischer Beschäftigung, z.B. das Schachspiel. Ein wahrer Satz der Theorie des Schachspiels ist z.B.: „Mit nur noch einem Springer kann man gegen einen optimal spielenden Gegner, der noch beide Türme hat, nicht gewinnen". Auch über AL kann man theoretische Aussagen machen. So folgen zwei fundamentale Ergebnisse der Theorie von AL schon unmittelbar daraus, dass ein AL-Modell eine *Funktion* ist:

Das B-Prinzip für wffs: Es kann nicht vorkommen, dass eine wff von AL in Bezug auf ein AL-Modell einfach farblos bleibt. *Jede* wff bekommt eine Farbe zugewiesen: wenn nicht Schwarz, dann Weiß, und umgekehrt.
Das K-Prinzip für wffs: Es kann nicht vorkommen, dass einer wff von AL in Bezug auf ein AL-Modell mehr als eine Farbe zugewiesen wird. Keine wff kann in Bezug auf eine AL-Interpretation sowohl schwarz als auch weiß sein.

Das K-Prinzip folgt, wenn nur Schwarz und Weiß zur Verfügung stehen, daraus, dass keinem Argument einer Funktion mehr als ein Funktionswert zugeordnet sein kann. Nichts schließt aus, dass es Spiele gibt, die zwar ähnlich funktionieren wie AL, für die aber aufgrund von etwas anders formulierten Spielregeln diese beiden Prinzipien nicht gelten. Ebenso ist es willkürlich, die Zahl der Farben auf zwei zu beschränken. So ist es eben für AL definiert.

Im Folgenden soll es darum gehen, die Theorie von AL weiter auszubauen. Dazu sind zunächst die wichtigsten Begriffe der Theorie des Spiels AL zu definieren:

Definition AL-Theorie 1
Sei α eine wff von AL.
(1) α ist (AL-)allgemeingültig gdw α für jedes AL-Modell schwarz ist.
(2) α ist (AL-)widerspüchlich gdw α für jedes AL-Modell weiß ist.
(3) α ist (AL-)erfüllbar gdw es ein AL-Modell gibt, für das α schwarz ist.

Allgemeingültigkeit heißt soviel wie: Ganz gleich, wie die Münze fällt (vgl. Übung 3 und 4 zu 3.2), welche Farbe also den atomaren Teilformeln zugewiesen wird – die Gesamtformel wird immer schwarz. Das ist eine faszinierende Eigenschaft von Formeln! Widersprüchlichkeit heißt soviel wie: Ganz gleich, wie die Münze fällt, welche Farbe also den atomaren Teilformeln zugewiesen wird – die Gesamtformel wird immer weiß. Erfüllbarkeit heißt: Es gibt eine Kombination von Münzwurfergebnissen für die Farbzuweisung der atomaren Teilformeln, bei der die Gesamtformel schwarz wird. Statt „widersprüchlich" sagt man auch „kontradiktorisch" (der Ausdruck „kontradiktorisch" wird dann in anderem Zusammenhang verwendet als in der klassischen Logik, vgl. dazu Kap. 4.5, Kap. 6.1). Man sagt auch statt „Diese Formel ist allgemeingültig" manchmal: „Diese Formel ist eine Tautologie von AL". Das hat eine rein technische Bedeutung und ist nicht abwertend gemeint (also nicht im Sinne von „...leeres, tautologisches Geschwätz", selbst wenn das an der entscheidenden Stelle in 48, 4.46 aus philosophischen Gründen mitschwingen soll). Oft hört man auch „Diese Formel ist ein Theorem von AL". In einem engeren Sinn ist das Wort „Theorem" aber erst im Zusammenhang mit Herleitungsspielen (vgl. Kap. 4.4) gebräuchlich.

Farbtabellen

Die Definition AL-Theorie 1 sagt uns noch nicht, *wie man herausbekommt*, ob eine Formel allgemeingültig, widersprüchlich oder erfüllbar ist (dies ist der Unterschied zwischen einer Definition und einem Kriterium). Eine Methode, wie man das herausbekommen kann, ergibt sich zwanglos aus dem in den letzten Übungen geübten Münzwurf-Verfahren: Man schreibe alle möglichen Kombinationen von Münzwurf-Ergebnissen in eine Tabelle und rechne (am besten am Anfang mit genauen Zwischenschritten) für jede mögliche Kombination einzeln die Farbe der zu überprüfenden Formel aus. Ist das Ergebnis in jedem Fall „schwarz", so ist die Formel allgemeingültig. Ist das Ergebnis in jedem Fall „weiß", so ist die Formel widersprüchlich. Ist das Ergebnis in einem Fall „schwarz", so ist die Formel erfüllbar. Beispiel:

p	q	$\sim$ q	(p $\rightarrow$ q)	((p $\rightarrow$ q) $\wedge$ $\sim$ q)	$\sim$ p	(((p $\rightarrow$ q) $\wedge$ $\sim$ q) $\rightarrow$ $\sim$ p)
●	●	○	●	○	○	●
●	○	●	○	○	○	●
○	●	○	●	○	●	●
○	○	●	●	●	●	●

„(((p $\rightarrow$ q) $\wedge$ $\sim$ q) $\rightarrow$ $\sim$ p)" ist allgemeingültig.

Frühe Beispiele für die Einzelfallmethode finden sich beim amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce, dem Begründer des Pragmatismus, und im genialen Frühwerk „Tractatus Logico-Philosophicus" (48) von Ludwig Wittgenstein. Statt der hier eingeführten Notation findet man die Tabellen auch manchmal platzsparend „um die Ecke" notiert, z.B. so:

(p $\vee$ q)	q ●	q ○
p ●	●	●
p ○	●	○

Ohne weiteres festhalten lässt sich: Ist α allgemeingültig, so ist $\ulcorner\sim\alpha\urcorner$ widersprüchlich. Ist α widersprüchlich, so ist $\ulcorner\sim\alpha\urcorner$ allgemeingültig.

Übungen

1) Was stimmt? [1] Allgemeingültigkeit ist hinreichende Bedingung für Erfüllbarkeit. [2] Erfüllbarkeit ist notwendige Bedingung für Allgemeingültigkeit. [3] Erfüllbarkeit schließt Allgemeingültigkeit aus. [4] Allgemeingültigkeit schließt Widersprüchlichkeit aus. [5] Erfüllbarkeit schließt Widersprüchlichkeit aus. [6] Erfüllbarkeit ist hinreichende Bedingung für Allgemeingültigkeit. [7] Allgemeingültigkeit ist notwendige Bedingung für Erfüllbarkeit. [8] Widersprüchlichkeit ist notwendige Bedingung für Allgemeingültigkeit.
2) Beweisen Sie mit Farbtabellen, ob die Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder widersprüchlich sind:
   [1] q [2] (p $\wedge$ q) [3] ((p $\wedge$ q) $\vee$ (q $\wedge$ p)) [4] (p $\equiv$ p) [5] $\sim$ (p $\wedge$ $\sim$ p)
   [6] $\sim$ (p $\vee$ $\sim$ p) [7] ($\sim$ p $\rightarrow$ (p $\rightarrow$ q)) [8] $\sim$ r [9] $\sim$ (p $\equiv$ $\sim$ $\sim$ p)
   [10] ((p $\vee$ q) $\vee$ (p $\vee$ $\sim$ q)) [11] (((p $\rightarrow$ q) $\wedge$ p) $\rightarrow$ q)
3) Erklären Sie mit Berufung auf in Übung 2 erzielte Ergebnisse, warum die folgenden Formeln allgemeingültig oder aber widersprüchlich sind:
   [1] (p $\equiv$ $\sim$ $\sim$ p) [2] (p $\wedge$ $\sim$ p)

3.4 Die Theorie von AL, zweiter Teil (Stilisierte Fallunterscheidung)

Stilisierte Fallunterscheidung

Die Methode der Farbtabellen ist zwar unfehlbar; und um zu begreifen, was Allgemeingültigkeit, Widersprüchlichkeit und Erfüllbarkeit von AL-Formeln ist, ist sie auch sehr nützlich. Aber Beispiel 4 zeigt auch schon, dass sie bei etwas längeren Formeln sehr schnell furchtbar umständlich ist. Zum Glück gibt es eine sehr viel schnellere Methode (in der vorgeführten Notation übernommen aus 8, Teil I, §5). Man kann sie die Methode der stilisierten Fallunterscheidung nennen. Hier ist der Beweis für die Allgemeingültigkeit von „(((p $\rightarrow$ q) $\wedge$ $\sim$ q) $\rightarrow$ $\sim$ p)" nach dieser Methode. Es sei vereinbart, dass reine Außenklammern ab sofort wegfallen.

1	$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$		
2	$((\top \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim \top$		$((\bot \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim \bot$
3	$(q \wedge \sim q) \rightarrow \sim \top$		$((\bot \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \top$
4	$(q \wedge \sim q) \rightarrow \bot$		$\mathbf{T}$
5	$\sim(q \wedge \sim q)$		
6	$\sim(\top \wedge \sim \top)$	$\sim(\bot \wedge \sim \bot)$	
7	$\sim(\top \wedge \bot)$	$\sim \bot$	
8	$\sim \bot$	$\mathbf{T}$	
9	$\mathbf{T}$		

Was geschieht hier? „T" soll als Abkürzung für „p≡p" definiert sein, „$\bot$" als Abkürzung für „~(p≡p)". Man könnte zusätzliche Karten mit diesen Zeichen basteln. Interessant an „p≡p" ist allein, dass es sich dabei um eine allgemeingültige Formel handelt. Interessant an „~(p≡p)" ist allein, dass es sich dabei um eine kontradiktorische Formel handelt. Jede andere allgemeingültige bzw. kontradiktorische Formel wäre für den beabsichtigten Zweck genauso gut.

In der ersten Zeile steht einfach die Formel, um deren Eigenschaften es geht. In der zweiten Zeile wird eine erste Fallunterscheidung stilisiert. Was links vom senkrechten Strich steht, besagt nämlich soviel wie: „Angenommen, ‚p' ist schwarz". Und was rechts vom senkrechten Strich steht, besagt soviel wie: „Angenommen, ‚p' ist weiß". Mit „p" fängt man an, weil es die am weitesten links stehende atomare Formel ist. Sollten Unterfälle zu unterscheiden sein, arbeitet man sich stur von links nach rechts durch.

Wieso kann man eine Fallunterscheidung so aufschreiben? „T" als allgemeingültige Formel ist ja eine immer schwarze Formel. Und „$\bot$" als kontradiktorische Formel ist eine immer weiße Formel. Für den Fall, dass „p" in der Ausgangsformel schwarz ist, *muss* die Ausgangsformel dieselbe Farbe haben wie diejenige Formel, die aus ihr hervorgeht, indem man „p" durch das sowieso *immer* schwarze „T" ersetzt. Und für den Fall, dass „p" in der Ausgangsformel weiß ist, *muss* die Ausgangsformel dieselbe Farbe haben wie diejenige Formel, die aus ihr hervorgeht, indem man „p" durch das sowieso *immer* weiße „$\bot$" ersetzt.

Zunächst zur rechten Seite: In der dritten Zeile wird „~$\bot$" durch „T" ersetzt. Das ist eine sichere Sache, weil eine kontradiktorische Formel mit einer Tilde davor immer eine allgemeingültige Formel ist und deshalb immer dieselbe Farbe hat wie „T". Umgekehrt ist es genau so sicher, „~T" durch „$\bot$" zu ersetzen. Man kann das als Regel so veranschaulichen:

$\sim T$	$\sim \bot$
$\bot$	T

Die rechte Seite der Fallunterscheidung ist in der vierten Zeile bereits fertig: Eine Pfeil-Verbindung kann nur weiß werden, wenn ihr Hinterglied weiß ist; es ist aber schwarz, also ist die ganze Pfeil-Verbindung schwarz. Das Ergebnis ist: Falls „p" weiß ist, so ist die Ausgangsformel schwarz – ganz gleich, was mit „q" los ist.

Nun zur linken Seite: In Zeile 3 kann man im Vorderglied zunächst „(T → q)" gefahrlos durch „q" ersetzen: Wenn die Pfeil-Verbindung vorn schwarz ist, so ist sie schwarz, wenn sie hinten schwarz ist, und weiß, wenn sie hinten weiß ist. Sie hat also insgesamt dieselbe Farbe wie hinten. In Zeile 4 wird „~T" durch „$\bot$" ersetzt. Für Zeile 5 muss man etwas um die Ecke denken: Man hat in Zeile 4 eine Pfeil-Verbindung erzeugt, die hinten weiß ist. Ist die Pfeil-Verbindung hinten weiß und vorn schwarz, so ist sie weiß, hat also die der Farbe des Vorderglieds *entgegengesetze* Farbe. Und ist sie hinten weiß und vorn weiß, so ist die Pfeilverbindung schwarz, hat also *wieder* gerade die der Farbe des Vorderglieds entgegengesetze Farbe. Die Tilde funktioniert aber gerade als Farbvertauscher. Also kann man vor das Vorderglied einfach eine Tilde setzen. In Zeile 6 müssen nun zwei

Unterfälle unterschieden werden: 1. „q" ist schwarz (links); 2. „q" ist weiß (rechts). Zunächst wieder zur rechten Seite: Eine Komponente der Hut-Verbindung „($\bot$ ∧ ~ $\bot$)" ist weiß. Deshalb muss die ganze Hut-Verbindung weiß werden und kann in Zeile 7 zu „$\bot$" vereinfacht werden. Damit steht dort „~$\bot$", was in Zeile 8 zum Ergebnis „T" wird. Links ist zunächst in Zeile 7 aus dem „~T" ein „$\bot$" zu machen, und dann geschieht dort dasselbe wie rechts. Das Ergebnis ist: Falls „p" schwarz ist und „q" weiß, ist die Ausgangsformel schwarz; falls „p" schwarz und „q" schwarz ist, auch. Die Ausgangsformel ist also in allen denkbaren Fällen schwarz, mithin allgemeingültig.

Steht in allen Fällen am Ende ein „$\bot$", so ist die Ausgangsformel kontradiktorisch. Kommen „T" und „$\bot$" gemischt vor, ist die Ausgangsformel weder allgemeingültig noch kontradiktorisch, aber erfüllbar.

Auswertungsregeln

Das Kernstück der Methode der stilisierten Fallunterscheidung sind Auswertungsregeln zur äquivalenten (farbbewahrenden) Ersetzung:

$\sim T$	$\sim \bot$	$T \wedge \alpha$	$\alpha \wedge T$	$\bot \wedge \alpha$	$\alpha \wedge \bot$	$T \vee \alpha$	$\alpha \vee T$	$\bot \vee \alpha$	$\alpha \vee \bot$
$\bot$	T	α	α	$\bot$	$\bot$	T	T	α	α

$T \to \alpha$	$\alpha \to T$	$\bot \to \alpha$	$\alpha \to \bot$	$T \equiv \alpha$	$\alpha \equiv T$	$\bot \equiv \alpha$	$\alpha \equiv \bot$
α	T	T	$\sim \alpha$	α	α	$\sim \alpha$	$\sim \alpha$

Die Auswertungsregel für Hut-Formeln liest man z.B. so: (1) Wenn die erste Komponente einer Hut-Verbindung schwarz ist, dann hat die ganze Hut-Verbindung die Farbe der zweiten Komponente. (2) Wenn die zweite Komponente einer Hut-Verbindung schwarz ist, dann hat die ganze Hut-Verbindung die Farbe der ersten Komponente. (3) Wenn die erste Komponente einer Hut-Verbindung weiß ist, dann ist die ganze Hut-Verbindung weiß. (4) Wenn die zweite Komponente einer Hut-Verbindung weiß ist, dann ist die ganze Hut-Verbindung weiß.

Bei der Tüte reicht *eine* schwarze Komponente, um die ganze Formel schwarz zu machen (erster und zweiter Fall), bei *einer* weißen kommt es auf die Farbe der anderen Komponente an: Ist sie ebenfalls weiß, ist die ganze Formel weiß, ist sie schwarz, so ist es auch die ganze Formel (dritter und vierter Fall).

Bei der Pfeil-Verbindung sind die ersten drei Fälle einfach: Ist sie vorn schwarz (erster Fall), kommt es darauf an, welche Farbe sie hinten hat, denn ist sie hinten weiß, ist sie insgesamt weiß; ist sie hinten schwarz, kann sie nicht insgesamt weiß werden, sondern ist schwarz – was auch gleich den zweiten Fall erklärt. Ist sie vorn weiß (dritter Fall), so macht die Farbe hinten nichts aus – die Formel wird sowieso schwarz. Beim vierten Fall muss man etwas um die Ecke denken, so wie es für das Beispiel erklärt wurde.

Ist bei der Spaghetti-Verbindung eine Komponente schwarz (erster und zweiter Fall), so hat die ganze Formel die Farbe der anderen Komponente. Denn ist die zweite Komponente ebenfalls schwarz, so hat sie die gleiche Farbe wie die erste, und das macht die ganze Formel schwarz; ist *sie* weiß, so hat sie nicht die gleiche Farbe wie die erste Komponente, und damit ist auch die *ganze* Formel weiß. Beim vierten Fall muss man wieder um die

Ecke denken: Ist eine Komponente weiß, so sind, *falls die andere schwarz ist*, die Farben der Komponenten verschieden, also die ganze Verbindung weiß – also das *Gegenteil* von schwarz; und falls die andere Komponente weiß ist, sind beide Komponenten weiß und damit die ganze Verbindung schwarz – also das Gegenteil von weiß. Mit der Tilde davor kann man also auch hier nichts falsch machen.

Zum Glück muss man nicht sehr oft bei der Spaghetti-Verbindung die Fälle wirklich durchrechnen. Denn steht auf beiden Seiten der Spaghetti dasselbe, so darf die Spaghetti-Verbindung ohne weiteres durch „T" ersetzt werden. Dasselbe soll für die Pfeil-Verbindung gelten. Dabei sollen auch $\ulcorner \alpha \urcorner$ und $\ulcorner {\sim}{\sim}\alpha \urcorner$ als dasselbe gelten.

Wesen des Beweises

Abgesehen von diesen Vereinfachungen ist es aber sehr zu empfehlen, Zwischenschritte immer sorgfältig auszunotieren und dem Gedanken „Das sieht man doch sofort!" nicht nachzugeben. Dafür gibt es zwei gute Gründe. Der erste ist: Man verhaspelt sich eben doch oft - gerade bei den einfachsten Schritten. Der zweite Grund ist noch viel schwerwiegender: Zum Wesen des Beweises gehört es, dass er eine öffentliche Sache ist. Ein Beweis ist kein Trick, um für sich ein Ergebnis herauszubekommen. Er muss *allgemein* nachvollziehbar sein, und zwar nicht nur von Leuten, die sofort dasselbe sehen wie man selbst.

Übung

Weisen Sie mit der Methode der stilisierten Fallunterscheidung nach, welche Eigenschaften die folgenden Formeln haben (ihre Namen spielen beim ersten Lesen des Kapitels noch keine Rolle):

[1]	$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$	Kontraposition (v.l.n.r.)
[2]	$(p \to q) \to (\sim p \to \sim q)$	falsche Kontraposition
[3]	$(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$	Kontraposition (Gegenrichtung)
[4]	$\sim (p \wedge \sim p)$	NWS
[5]	$p \vee \sim p$	SAD
[6]	$p \equiv {\sim}{\sim} p$	DN (bitte ohne Vereinfachung!)
[7]	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Transitivität von „→"
[8]	$\sim p \to (p \to q)$	1. Paradoxie der materialen Implikation
[9]	$p \to (q \to p)$	2. Paradoxie der materialen Implikation
[10]	$(p \wedge \sim p) \to q$	ex falso quodlibet
[11]	$(p \to q) \to \sim (p \wedge \sim q)$	Konditional als Konjunktion

3.5 Die Theorie von AL, dritter Teil (AL-Schemata und ihre Eigenschaften)

Offizielle Namen der Junktoren

In diesem Abschnitt geht es darum, wie man die Methode der stilisierten Fallunterscheidung einsetzen kann, um noch weit allgemeinere Ergebnisse zu etablieren als bisher. Zunächst soll eine rein sprachliche Vereinbarung getroffen werden. Man denkt sich am besten nichts weiter dabei:

> Die Hut-Verbindung heißt ab jetzt Konjunktion.
> Die Tüten-Verbindung heißt ab jetzt Alternation.
> Die Pfeil-Verbindung heißt ab jetzt Konditional.
> Die Spaghetti-Verbindung heißt ab jetzt Bikonditional.
> Die Tilde heißt ab jetzt (Satz-)Negator.

Implikation und Äquivalenz

Es ist zwar gebräuchlicher, aber unfeiner Slang, das Konditional auch dann als Implikation zu bezeichnen, wenn man über eine nicht-allgemeingültige Formel redet. Korrekterweise ist nur ein *allgemeingültiges* Konditional eine Implikation. Entsprechendes gilt für das Bikonditional und die Bezeichnung „Äquivalenz".

Schemata

Mit Hilfe von griechischen Buchstaben und Winkelklammern lässt sich eine Behauptung aufstellen wie die folgende: $\ulcorner \alpha \to \alpha \urcorner$ ist AL-allgemeingültig. Das ist zweifellos eine sehr plausible Behauptung, aber sie geht weit über die Behauptung hinaus, dass „p → p" AL-allgemeingültig ist. Aber man kann die Methode der stilisierten Fallunterscheidung *indirekt* auch zum Nachweis allgemeinerer Ergebnisse benutzen. Man macht sich nämlich leicht klar: Der Beweis im einfachsten denkbaren Fall reicht schon aus. Er lässt sich auf das allgemeine *Schema* (hier: ein Gebilde mit griechischen Buchstaben und ggf. Winkelklammern) übertragen. Denn Einsetzen (und dabei Erzeugen des denkbar einfachsten Falls) erhält Allgemeingültigkeit oder Widersprüchlichkeit, wenn auch nicht unbedingt Erfüllbarkeit.

Gegenbeispiel zur Behauptung, Einsetzen erhalte Erfüllbarkeit: „$p \wedge q$" ist erfüllbar, aber wenn man sowohl „p" als auch „q" durch „$(p \wedge \sim p)$" austauscht, so erhält man „$(p \wedge \sim p) \wedge (p \wedge \sim p)$" - eine widersprüchliche Formel.

Eigenschaften von Junktoren

Schließlich ist es möglich, noch allgemeinere Aussagen der Theorie von AL zu machen, nämlich nicht nur über Schemata, sondern über formale Eigenschaften der darin vorkommenden Junktoren. So kann man etwa beweisen, dass Konjunktion und Alternation sowohl assoziativ als auch kommutativ sind, das Konditional aber keins von beidem. Dabei ist ein zweistelliger Junktor ξ (sprich: „xi") genau dann kommutativ, wenn (für beliebige wffs α und β) gilt: $\ulcorner(\alpha \, \xi \, \beta) \equiv (\beta \, \xi \, \alpha)\urcorner$ ist allgemeingültig. Und ξ ist genau dann assoziativ, wenn gilt: $\ulcorner((\alpha \, \xi \, \beta) \, \xi \, \gamma) \equiv (\alpha \, \xi \, (\beta \, \xi \, \gamma))\urcorner$ ist allgemeingültig. „Kommutativ" bedeutet ungefähr: „Die Reihenfolge ist egal". „Assoziativ" bedeutet ungefähr: „Die Klammerung ist egal".

Übungen

1) Widerlegen Sie anhand von konkreten Gegenbeispielen mit Farben von wffs die Kommutativität und die Assoziativität des Konditionals.
2) Beweisen oder widerlegen Sie die Allgemeingültigkeit von:

[1]	$\ulcorner((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta\urcorner$	m.p.p.
[2]	$\ulcorner((\alpha \to \beta) \wedge \sim \alpha) \to \sim \beta\urcorner$	falscher m.t.t.
[3]	$\ulcorner((\alpha \to \beta) \wedge \sim \beta) \to \sim \alpha\urcorner$	m.t.t.
[4]	$\ulcorner((\alpha \equiv \beta) \wedge \sim \alpha) \to \sim \beta\urcorner$	verstärkter m.t.t.
[5]	$\ulcorner((\alpha \to \beta) \wedge \beta) \to \alpha\urcorner$	falscher m.p.p.
[6]	$\ulcorner((\alpha \nabla \beta) \wedge \sim \alpha) \to \beta\urcorner$	disj. m.t.p.
[7]	$\ulcorner((\alpha \nabla \beta) \wedge \beta) \to \sim \alpha\urcorner$	disj. m.p.t.

Die Namen der Schemata sind vorerst noch unwichtig.

3.6 Die Theorie von AL, vierter und letzter Teil (Sheffer-Strich)

Interdefinierbarkeit der Junktoren

Es ist recht üblich, wie oben in Definition 1 geschehen, nur den Negator und die Konjunktion vorauszusetzen und Alternation, Konditional und Bikonditional per Definition einzuführen. Genau so gut hätte man aber auch den Negator und die Alternation voraussetzen und dann Konjunktion und Alternation so definieren können:

$\ulcorner{\sim}({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)\urcorner$ darf jederzeit durch $\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.
$\ulcorner({\sim}\alpha \vee \beta)\urcorner$ darf jederzeit durch $\ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.

Schließlich hätte man auch den Negator und das Konditional voraussetzen und definieren können:

$\ulcorner({\sim}\alpha \rightarrow \beta)\urcorner$ darf jederzeit durch $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.

Die Konjunktion hätte man dann über die Alternation einführen können („$\ulcorner{\sim}({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)\urcorner$“). Das Bikonditional wird grundsätzlich wie in Kapitel 3.2 als Konjunktion des Konditionals in beiden Richtungen definiert. Die Farbregeln in Definition 4 müssten auf offensichtliche Weise angepasst werden.

Sheffer-Strich

Man kann sich fragen, wie weit sich die Reduktion der Junktoren treiben lässt. Braucht man überhaupt immer zwei Junktoren, um alle anderen zu definieren – oder reicht vielleicht einer? Die Antwort ist eine echte Kuriosität der Logikgeschichte: Es gibt zwei (um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert) entdeckte Möglichkeiten, beim AL-Spielen mit nur *einem* Junktor auszukommen, dem Sheffer-Strich oder dem Peirce-Pfeil. Die einzige syntaktische Regel für die Junktoreneinführung im AL-Spiel mit Sheffer-Strich lautet: „Wenn α und β wffs von AL sind, so auch $\ulcorner(\alpha \mid \beta)\urcorner$.“ Und die ganze Farbdefinition des AL-Spiels mit Sheffer-Strich lautet:

...V($(\alpha \mid \beta)$) = ●, falls nicht sowohl V(α) = ● als auch V(β) = ●.

Kurz gesagt wird also die Sheffer-Strich-Verbindung gerade dann schwarz, wenn *nicht beide* Komponenten schwarz sind. Darauf, wie man mit dem Sheffer-Strich und dem Negator die Konjunktion definieren kann, kommt man recht schnell:

$\ulcorner{\sim}(\alpha \mid \beta)\urcorner$ darf jederzeit durch $\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\urcorner$ abgekürzt werden.

Schließlich ist ja die Konjunktion gerade dann schwarz, wenn beide Komponenten schwarz sind. Aber wie soll man es anstellen, den Negator durch den Sheffer-Strich zu definieren? Der Negator ist doch ein einstelliger und der Sheffer-Strich ein zweistelliger Junktor! Die Lösung ist:

$\ulcorner(\alpha \mid \alpha)\urcorner$ darf jederzeit durch $\ulcorner{\sim}\alpha\urcorner$ abgekürzt werden.

Warum das tatsächlich die Lösung ist, versteht man allerdings erst mit der entsprechenden Farbtabelle vor Augen:

p	p	p | p	~p
●	●	○	○
○	○	●	●

Insgesamt hat sich die sparsamste Variante gegenüber den übersichtlicheren Varianten nicht durchgesetzt (das ist eher ungewöhnlich in der Logik!). Der Sheffer-Strich und der Peirce-Pfeil „↓“(„beide nicht schwarz“) spielen also in der Anwendung keine große Rolle – was ihre theoretischen Bedeutung nicht schmälert.

Übungen

1) Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln mit der Methode der stilisierten Fallunterscheidung:

[1] $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$	De Morgan 1
[2] $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	De Morgan 2
[3] $(p \equiv q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	Bikonditional-Einsparungsregel
[4] $(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$	Konditional-Einsparungsregel 1
[5] $(p \wedge q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$	Konjunktions-Einsparungsregel 1
[6] $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Distributionsregel
[7] $p \rightarrow (p \vee q)$	Hinzufügungsregel
[8] $\sim(p \rightarrow \sim q) \equiv (p \wedge q)$	Konjunktions-Einsparungsregel 2
[9] $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$	Konditional-Einsparungsregel 2
[10] $(p \vee q) \equiv (\sim p \rightarrow q)$	Alternations-Einsparungsregel
[11] $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	Importationsgesetz (für „q“ ins Vorderglied)
[12] $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Exportationsgesetz (aus dem Vorderglied)

2) Erklären Sie, wieso die Einsparungsregeln in Übung 2 ihren Namen verdient haben.

3.7 Zusammenfassung und Literaturhinweise

Zusammenfassung

Das völlig sinnfreie Spiel AL und seine Theorie ist durch Kap. 3 umfassend dargestellt: Die Charaktere der verschiedenen Junktoren sind deutlich geworden: „~“ (Farbvertauscher), „∧“ (schwarz, nur wenn beide schwarz), „∨“ (schwarz, schon wenn *einer* schwarz), „→“ (weiß nur beim Input schwarz-weiß) und „≡“ (Farbvergleicher). Die Begriffe der Allgemeingültigkeit (bei jedem Input schwarz), der Widersprüchlickeit (bei jedem Input weiß) und der Erfüllbarkeit (bei manchem Input schwarz) wurden geklärt. Es wurde außerdem erklärt, wie man die Allgemeingültigkeit einer Formel einerseits mit der Methode der Farbtabellen, andererseits mit der Methode der stilisierten Fallunterscheidung nachweist. Ferner wurde erörtert, wie man Beweise der Eigenschaften von Formeln für Schemata (Gestalten von Formeln) erweitern kann und wie man bestimmte Eigenschaften von Junktoren untersucht wie Kommutativität (Reihenfolge des Inputs egal) und Assoziativität (Klammerung egal). Schließlich wurde gezeigt, wie man die Anzahl der primitiven Junktoren minimiert und die übrigen durch Definition einführt. Man fragt sich natürlicherweise nun: Was kann man mit AL anfangen? Darum soll es im nächsten Kapitel gehen.

Literaturhinweise

Über Cantor informiert 145, 144. Der Sheffer-Strich findet sich zum ersten Mal in 75.