1. Klassische und nichtklassische Logik

1.1. Zum Gegenstand der Logik*

In diesem Abschnitt wollen wir kurz und in einer mehr beschreibenden Weise unsere Auffassung von Logik darlegen. Dabei geht es uns hier nicht vorrangig um den Bestand allen logischen Wissens, sondern vor allem um die Darstellungsweise solchen Wissens. Da es keine allgemein anerkannte Definition des Gegenstandes der Logik gibt, scheint uns ein solcher Abschnitt nützlich und in Anbetracht dessen, daß mit diesem Buch eine Einführung in eine Vielzahl logischer Theorien gegeben werden soll, auch unumgänglich. Im Idealfall wäre eine allgemeine Konzeption von Logik darzulegen, aus der man mindestens alle bekannten logischen Theorien durch Spezifikation erreicht. Ein in diese Richtung weisender Ansatz verbindet sich mit dem allgemeinen Kalkülbegriff. Im folgenden Abschnitt werden wir darauf zurückkommen.

Der inhaltliche Zusammenhang der logischen Kalküle läßt sich bis zu einem gewissen Grade dadurch einsichtig machen, daß man sie in Beziehung zu einer fest ausgewählten logischen Theorie setzt — und so verfahren wir auch nachfolgend. Die zu diesem Zwecke ausgewählte logische Theorie ist die sogenannte klassische Logik. Der Ausdruck „nichtklassische Logik" deutet die Verneinung von klassischer Logik unter dem gemeinsamen Oberbegriff Logik an. Es hat sich eingebürgert, unter klassischer Logik einen Bestand an logischen Theorien über Aussagen und ihre inneren Strukturen zu verstehen, für die die *Zweiwertigkeit* und die *Extensionalität* charakteristische Voraussetzungen sind. Was ist damit gemeint?

Beginnend mit der klassischen Logik hat sich eine Sprachbetrachtung[1]

---

* Unter Mitarbeit von Werner Wolff.

1 Eine Sprache, insbesondere die Fachsprache einer Wissenschaft, ist sozusagen das Medium, durch das der Wissenschaft vom Logischen eben dieses Logische gegeben ist. Allein wegen dieser Art des Gegebenseins, die „perfektioniert" wird durch eine das betreffende Logische „rein" zum Ausdruck bringende formalisierte Sprache, tritt, der Sprachbezug hier so in den Vordergrund. Das Logische selbst hat einen in dem durch die Praxis vermittelten Verhältnis von Erkennen und Wirklichkeit liegenden außersprachlichen Grund.

herausgebildet, die auch in der nichtklassischen Logik fortgeführt wird und die verallgemeinernd folgendermaßen beschrieben werden kann: Sprache gilt als aus kleinsten Einheiten rekursiv aufgebaut, und zwar parallel syntaktisch und semantisch. In der Semantik wird in Übereinstimmung mit der Sprachwissenschaft unterstellt, daß sprachliche Ausdrücke nicht nur eine Bedeutung, sondern auch einen Sinn, nicht nur eine Extension, sondern auch eine Intension haben, also insbesondere nicht nur für bestimmte Gegenstände stehen, sondern auch in bestimmter Weise verstanden werden, bzw. die Gegebenheitsweise der Gegenstände, für die sie stehen, bestimmen. Die umgekehrte und nicht selbstverständliche Unterstellung, daß sprachliche Ausdrücke nicht nur einen Sinn, sondern auch eine Bedeutung haben müssen, wurde zwar zu Beginn der Entwicklung der klassischen Logik gemacht und erleichterte ihren Aufbau, ist aber nur bei einer bestimmten Deutung des syntaktischen Apparates erforderlich.

Idealisierend wird unterstellt, daß Bedeutung und Sinn eines Ausdrukkes eindeutig bestimmt und konstant, d. h. invariant bezüglich seiner Verwendung sind. Auf dieser Basis ergeben sich unproblematisch folgende Zusammenhänge: Der Sinn eines Ausdrucks ist in regelgeleiteter Weise abhängig vom Sinn seiner Teilausdrücke — oder anders formuliert: ein Sprecher, der die entsprechenden Regeln kennt, versteht einen Ausdruck genau dann, wenn er alle seine Teilausdrücke versteht. Der Sinn eines Ausdrucks bestimmt nun seine Bedeutung, d. h. die Bedeutung eines Ausdrucks kann bestimmt werden, wenn er verstanden wurde.

Wenn nun zusätzlich gefordert wird, daß die Bedeutung eines Ausdrucks nur von der Bedeutung seiner Teilausdrücke abhängt, so gilt dies sicher nicht für beliebige Ausdrücke.

Kontexte, als komplexe Ausdrücke, die diese Forderung erfüllen, heißen extensionale Kontexte und Funktoren, die derartige Ausdrücke bilden, heißen extensionale Funktoren. Extensionale Kontexte lassen sich äquivalent durch folgenden Zusammenhang charakterisieren: wenn wir in ihnen einen beliebigen Teilausdruck durch einen bedeutungsgleichen ersetzen, so bleibt die Bedeutung des Kontextes konstant. In der klassischen Logik werden nur Folgebeziehungen in extensionalen Behauptungskontexten untersucht.

Wir hatten bisher offengelassen, wie der Ausdruck „Bedeutung“ näher bestimmt wird. Es wäre zum Beispiel denkbar, als Bedeutung eines Aussagesatzes den durch ihn beschriebenen Sachverhalt einzuführen. Daß der Wahrheitswert eines Behauptungssatzes als seine Be-

deutung gewählt wird, hängt offensichtlich mit der Bestimmung des Folgerungsbegriffes zusammen. Unter diesen Voraussetzungen sind die Eigenschaften extensionaler Satzfunktoren durch Wahrheitsfunktionen beschreibbar; und damit ist eine Abstraktion zu vollziehen von Aussagen auf Wahrheitswerte, von Aussagenvariablen auf Wahrheitswertvariable und von Satzfunktoren auf Funktionen (Junktoren), die n-Tupeln von Wahrheitswerten Wahrheitswerte zuordnen.

Diese wahrheitsfunktionale Betrachtungsweise hat nun selbst Konsequenzen für die syntaktische Gliederung elementarer Behauptungssätze. Es wird von einer Teilklasse elementarer Behauptungssätze, den atomaren Behauptungssätzen, ausgegangen, in denen die Bezeichnungen von individuellen Gegenständen und der jeweilige Rest des Satzes herausgehoben werden, wobei dieser Rest als Prädikat bezeichnet und als sprachlicher Ausdruck für eine Funktion betrachtet wird, die n-Tupeln von Gegenständen Wahrheitswerte zuordnet. Die hiermit gegebene funktionale Betrachtungsweise läßt sich verallgemeinert auf Kontexte übertragen, die nicht-extensional sind, in denen aber folgendes Prinzip gilt: Die Bedeutung des Kontextes ändert sich bei einer beliebigen intensionsgleichen Ersetzung eines beliebigen Teilausdruckes nicht. Solche Kontexte heißen intensionale Kontexte. Kontexte, in denen selbst dieses Prinzip nicht gilt, werden nicht-intensionale Kontexte genannt. Während in intensionalen Kontexten eine Abstraktion von Aussagen auf ihre Intensionen vollzogen werden kann, ist in nicht-intensionalen Kontexten selbst diese Abstraktion nicht möglich: Objekte der Analyse können nur die Aussagen selbst sein.

Verneinen wir nun, daß eine klassische logische Theorie vorliegt, so wird die Zweiwertigkeit oder die Extensionalität oder beides verneint. Die Verneinung der Zweiwertigkeit führt zum Aufbau von mehrwertigen logischen Theorien. Die Zahl der Wahrheitswerte kann dabei endlich oder unendlich sein. Die Extensionalität läßt sich so einfach nicht verneinen, weil es dann schwierig wäre, etwas zu bestimmen, was tragfähig genug zum Aufbau einer logischen Theorie ist. Sie kann aber erstens durch Aufnahme außerlogischer Voraussetzungen abgeschwächt werden. Das führt zu angewandten logischen Theorien. Z. B. läßt sich die Zeitlogik als angewandte Prädikatenlogik auffassen. Die Extensionalität kann zweitens eingeschränkt werden, indem gewisse Ausdrücke, die extensionale Aussagenverbindungen sind, explizit ausgeschlossen werden. Ein Beispiel für eine derartige Einschränkung ist die sogenannte relevante Logik. Die Gründe für eine solche Einschränkung sind dabei nicht außerlogischer Natur. In der Regel verbinden sie sich mit dem Bemühen, gewissen als paradox empfundenen Eigenschaften der logischen Folgebeziehung keine syntaktische Entsprechung zu geben.

Um die der klassischen Logik eigene Folgebeziehung definieren zu können, benötigen wir den Begriff eines formalen Schlußschemas. Wir gehen dazu von einem konkreten Schlußbeispiel aus:

(1) Jede Primzahl ist eine natürliche Zahl.
(2) 5 ist eine Primzahl.

---

5 ist eine natürliche Zahl.

Ersetzt man die Begriffsausdrücke „Primzahl“ und „eine natürliche Zahl“ durch „A“ und „B“ und vereinbart, daß diese Buchstaben den Platz für Begriffsausdrücke frei halten, also Variablen sind, für die nur Begriffsausdrücke eingesetzt werden können (derselbe Begriffsausdruck für dieselbe Variable), vereinbart man ferner, daß der Buchstabe „a“ an die Stelle von „5“ gesetzt eine Variable nur für Eigennamen ist (mit derselben Einsetzungsbedingung), so geht das Schlußbeispiel in das folgende Schlußschema über:

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{Jedes } A \text{ ist } B \\ (2) & a \text{ ist } A \\ \hline & a \text{ ist } B \end{array}$$

Der waagerechte Strich steht für eine logische Grundbeziehung, die gerade zu definieren ist. Die Aussagen über dem Strich heißen die Prämissen, die Aussagen unter dem Strich die Konklusion. Beide Bezeichnungen werden auch beim Übergang zum formalen Schlußschema beibehalten.

Ein formales Schlußschema ist ein mittels Variablen mit festen Einsetzungsbedingungen und Zeichen für logische Konstanten so aufgebautes Schema, daß bei zulässiger, d. h. den Einsetzungsbedingungen entsprechender Einsetzung, ein Schlußbeispiel entsteht. Ein Schlußbeispiel besteht aus der Behauptung, daß aus n (hier $n = 2$) untereinander geschriebenen Aussagen eine weitere, durch einen Strich getrennte Aussage logisch folgt (kurz: folgt). Diese Behauptung ist wahr dann und nur dann, wenn das formale Schlußschema, aus dem das Schlußbeispiel durch zulässige Einsetzung entstand, folgende Eigenschaft hat: Bei jeder zulässigen Einsetzung, bei welcher die Prämissen wahre Aussagen sind, ist auch die Konklusion eine wahre Aussage.

Achilles und die Schildkröte. Fabel?

Das ist die Definition der klassischen logischen Folgebeziehung mittels formaler Schlußschemata. Der waagerechte Strich steht also für die logische Folgebeziehung.

Ein formales Schlußschema, das die Eigenschaft hat, daß zwischen seinen Prämissen und seiner Konklusion die logische Folgebeziehung besteht, nennt man ein gültiges formales Schlußschema (vgl. zu dieser Begriffsbildung: Borkowski [1976], S. 28ff.). Bezüglich jeder durch zulässige Einsetzung aus einem gültigen formalen Schlußschema entstandenen Konklusion kann man sagen, daß sie aus den jeweiligen Prämissen (logisch) folgt. Man kann aber nicht behaupten, daß sie in jedem Fall auch wahr ist. Das kann man erst, wenn man weiß, daß alle Prämissen wahr sind. (Sie ist zwar auch dann wahr, wenn die Prämissen ohne unser Wissen darum wahr sind, aber wir könnten daraus doch keinen Gewinn ziehen.)

Die klassische Folgebeziehung läßt sich in verschiedener Richtung verallgemeinern. Zum einen wäre denkbar, sinnvolle Sätze zu betrachten, die keinen Wahrheitswert haben. Dann haben wir es mit Sätzen zu tun, die keine Aussagen sind, also z. B. mit Fragen, Befehlen, Bitten oder Aufforderungen. Kann an die Stelle von Wahrheit bei solchen Satzarten eine mit dem ausgedrückten Sinn verbundene andere Eigenschaft treten, daß immer dann, wenn solche sinnvollen Sätze als Prämissen diese Eigenschaft haben, sie auch der als Konklusion vorkommende sinnvolle Satz gleicher Art hat, so ist die Folgebeziehung erfüllt. So kann man z. B. bezüglich einer Norm sagen, daß sie gültig ist oder nicht. Dann ist die und-Verbindung zweier Normen eine Norm, die gültig ist genau dann, wenn die beiden in diese Verbindung eingehenden Normen gültig sind. Die Extensionalität bleibt gewahrt, ebenso die Zweiwertigkeit, obwohl die Werte keine Wahrheitswerte sind. Auch in diesem Fall erhält man eine nichtklassische logische Theorie, da ihre Objekte keine Aussagen sind.

Klassische und nichtklassische logische Theorien sind Deutungen der allgemeinen Folgebeziehung je nach in Betracht gezogener Satzart. Dabei ist hier „Satzart“ in einem grammatischen Sinne zu verstehen. Die oben gegebene Definition einer speziellen Folgebeziehung geht in die Definition der allgemeinen Folgebeziehung über, wenn anstelle von „Aussagen“ gesetzt wird „Sätze“, und an die Stelle von „Wahrheitswert“ nunmehr „ausgezeichneter Wert“.

Weil die allgemeine Folgebeziehung dieselbe ist, wie immer auch gedeutet, handelt es sich um zusammengehörige, die eine Logik ausmachende Theorien. Logik hat somit die allgemeine Folgebeziehung in der Menge möglicher Deutungen über Satzarten zum Gegenstand. Eine solche Deutung legt umgekehrt auch eine bestimmte Folgebeziehung fest. Die Auswahl einer Satzart ist die zur Zeit auch übliche Verfahrensweise beim Aufbau eines nichtklassischen logischen Systems. Berücksichtigt man Behauptungssätze, die zwar einen Wahrheitswert haben, aber nicht-extensionale oder sogar nicht-intensionale Kontexte bilden, so erhält man auf diese Weise, je nach weiterer Spezifikation der Behauptungssätze, eine zur nichtklassischen Logik gehörende logische Theorie. Ein solches Verständnis von nichtklassischer Logik ist das vorherrschende und liegt auch den in diesem Buch dargestellten logischen Theorien zugrunde.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Spiegelung der Voraussetzungen nichtklassischer logischer Theorien an denjenigen der klassischen logischen Theorien nur einer systematisierenden Sichtweite diente, die eine Gegenstandsbestimmung von Logik zum Ziel hatte. Als ein methodisches Verfahren beschreibt es nicht zugleich auch die tatsächliche Entstehungsgeschichte nichtklassischer logischer Theorien. So sind z. B. die heutigen modallogischen Untersuchungen historisch aus dem Bemühen hervorgegangen, einen stärkeren inhaltlichen Zusammenhang zwischen den Prämissen und der Konklusion eines Schlusses herzustellen. Wie im Vorwort bereits erwähnt, werden die einzelnen Kapitel auch über die historischen Beweggründe für jede der behandelten nichtklassischen logischen Theorien Auskunft geben.

1.2. Zum allgemeinen Kalkülbegriff

Präziser als die allgemeine Folgebeziehung läßt sich der Kalkülbegriff bestimmen. In diesem Abschnitt werden wir eine so allgemeine Definition dieses Begriffes geben, daß alle in diesem Buch zur Sprache kommenden logischen Kalküle Spezifizierungen von ihm sind. Explizit darstellen werden wir das in bezug auf Kalküle der klassischen Logik, weil wir dadurch zugleich auch gewisse terminologische Festsetzungen für alle Kapitel des Buches treffen können. Die Spezifikation stellt keine Einführung in die klassische Logik dar. Wer auf diesem Gebiet sein Wissen auffrischen oder vertiefen will, sei auf die reichlich vorhandene Literatur zur klassischen Logik verwiesen, so z. B. auf Asser [1959], Novikov [1973], Borkowski [1976], Schreiber [1977] oder Wessel [1984].

Ein Leser, dem es weniger um innerlogische Grundsatzbetrachtungen geht, kann diesen Abschnitt überschlagen, denn zum Studium der meisten nicht-klassischen logischen Systeme sind von logischer Seite her Grundkenntnisse der klassischen Aussagenlogik hinreichend. Über die Festsetzungen kann er sich anhand des Stichwortverzeichnisses durch Zurückschlagen informieren. Wie bei Begriffsbildungen unvermeidlich, ist das Folgende äußerlich eine Abfolge von Bestimmungen.

Sei AD eine abzählbar unendliche Menge von Ausdrücken, $\{H, G, F, H_1, G_1, F_1, \ldots\}$, die aus atomaren Ausdrücken $\mathbf{AT}$ mittels der Junktoren $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gebildet wurden. Das Tupel $\langle \mathsf{AD}, \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ nennen wir eine *formale Sprache* $\mathbf{L}$. Wir sagen, daß eine formale Sprache $\mathbf{L}_1$ *Erweiterung* einer formalen Sprache $\mathbf{L}_2$ – und $\mathbf{L}_2$ entsprechend *Redukt* von $\mathbf{L}_1$ – ist, wenn die Junktoren von $\mathbf{L}_2$ allesamt Junktoren von $\mathbf{L}_1$ sind und die Ausdrucksmenge AD_2 gleich der Menge aller derjenigen Ausdrücke von $\mathbf{L}_1$ ist, die ausschließlich mittels in $\mathbf{L}_2$ vorkommender Junktoren gebildet wurden.

Eine Abbildung C der Menge aller Untermengen von AD in sich selbst nennen wir *Konsequenzoperation* in $\mathbf{L}$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

Für alle $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}$ gilt: $\Gamma \subseteq \mathsf{C}(\Gamma) = \mathsf{C}(\mathsf{C}(\Gamma))$;

Für alle $\Gamma, \Sigma \subseteq \mathsf{AD}$ gilt: wenn $\Gamma \subseteq \Sigma$, dann $\mathsf{C}(\Gamma) \subseteq \mathsf{C}(\Sigma)$.

Dieser Konsequenzbegriff geht auf Tarski [1936] zurück. Eine Konsequenzoperation nennen wir *kompakt*, wenn aus $H \in \mathsf{C}(\Gamma)$ die Existenz einer endlichen Ausdrucksmenge Γ_f folgt, für die $H \in \mathsf{C}(\Gamma_f)$ gilt.
Jede Konsequenzoperation C legt eine *Konsequenzrelation* $\vdash_{\mathsf{C}}$ in $\mathbf{L}$ zwischen Ausdrucksmengen und Ausdrücken fest:

Für alle $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}$, $H \in \mathsf{AD}$ gilt nach Definition $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} H$ genau dann, wenn $H \in \mathsf{C}(\Gamma)$.

Wir sagen in diesem Falle, daß H aus Γ C-*herleitbar* ist. Umgekehrt ist für eine in $\mathbf{L}$ gegebene Konsequenzrelation $\vdash$ mit

$$\mathsf{C}_{\vdash}(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} \{H \in \mathsf{AD} \mid \Gamma \vdash H\}$$

eine Konsequenzoperation in $\mathbf{L}$ erklärt. Weil Konsequenzoperationen und Konsequenzrelationen einander eindeutig entsprechen, werden wir nicht streng zwischen ihnen unterscheiden. Der später gelegentlich verwendete Terminus „Konsequenz" kann jede von ihnen bedeuten.

Ein geordnetes Paar $\langle \mathbf{L}, \vdash \rangle$ oder auch $\langle \mathbf{L}, \mathsf{C} \rangle$, wobei $\mathbf{L}$ eine formale

Sprache und $\vdash$ bzw. C eine Konsequenz in der Ausdrucksmenge dieser Sprache ist, nennen wir einen *Kalkül* in der Sprache $\mathbf{L}$.

Sei nun $\mathsf{K} = \langle \mathbf{L}, \mathsf{C} \rangle$ ein Kalkül. Eine Menge Γ, mit $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}$, nennen wir *widerspruchsfrei* bezüglich C — kurz: C-*widerspruchsfrei* oder auch C-*konsistent* —, wenn zumindest ein Ausdruck von AD nicht aus Γ C-herleitbar ist. Andernfalls ist Γ C-*widersprüchlich* oder auch C-*inkonsistent*. Falls unter den Junktoren der Sprache des Kalküls der Negator $\sim$ vorkommt, sagt man gelegentlich auch, daß Γ *klassisch* C-*widersprüchlich* ist, wenn ein Ausdruck H und seine Negation $\sim H$ aus Γ C-herleitbar sind, und daß Γ *klassisch widerspruchsfrei* ist, wenn dem nicht so ist. Unter gewissen Bedingungen sind beide Konsistenzbegriffe äquivalent.

Eine C-konsistente Ausdrucksmenge Γ nennen wir *maximal* C-*konsistent* oder *syntaktisch vollständig* bezüglich C — kurz: C-*vollständig* —, wenn für jeden nicht zu $\mathsf{C}(\Gamma)$ gehörenden Ausdruck H die Menge $\Gamma \cup \{H\}$ C-inkonsistent ist. Jede C-konsistente Ausdrucksmenge kann gemäß dem Lindenbaum*schen Erweiterungssatz* zu einer C-vollständigen Menge erweitert werden. Eine den Negator enthaltende formale Sprache vorausgesetzt, nennen wir Γ — analog zur klassischen Konsistenz — *klassisch* C-*vollständig*, wenn für alle Ausdrücke H genau entweder H oder $\sim H$ aus Γ C-herleitbar ist.

Die Ausdrucksmenge Γ wird bezüglich C *deduktiv abgeschlossen* genannt, wenn alle aus Γ C-herleitbaren Ausdrücke Elemente von Γ sind, d. h. wenn $\Gamma = \mathsf{C}(\Gamma)$. Eine Menge von Ausdrücken Γ nennen wir C-*unabhängig*, wenn kein Ausdruck $H \in \Gamma$ aus der um H verminderten Menge Γ C-herleitbar ist: $H \notin \mathsf{C}(\Gamma \setminus \{H\})$.

Die aus der leeren Menge $\emptyset$ C-herleitbaren Ausdrücke sind die *Sätze* von K. Einen Kalkül K nennen wir C-*konsistent* usw., wenn seine Satzmenge diese Eigenschaft hat. Kalküle mit rekursiver Satzmenge nennen wir *entscheidbar*, d. h. K ist entscheidbar, wenn es ein Berechnungsverfahren gibt, welches für beliebige Ausdrücke H nach endlich vielen Schritten die Frage beantwortet, ob H ein Satz von K ist.

Seien $\mathsf{K}_1 = \langle \mathbf{L}, \mathsf{C}_1 \rangle$ und $\mathsf{K}_2 = \langle \mathbf{L}, \mathsf{C}_2 \rangle$ Kalküle in derselben Sprache. Wir sagen, daß K_1 in K_2 *enthalten* ist und daß K_2 K_1 *enthält*, wenn die Satzmenge von K_1 in derjenigen von K_2 enthalten ist. K_1 und K_2 sind *äquivalent*, wenn ihre Satzmengen gleich sind. K_1 ist in K_2 *streng enthalten*, wenn für alle $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}$ gilt: $\mathsf{C}_1(\Gamma) \subseteq \mathsf{C}_2(\Gamma)$. K_1 und K_2 sind *streng äquivalent*, wenn sie sich gegenseitig streng enthalten.
Seien ferner zwei Kalküle $\mathsf{K}_1 = \langle \mathbf{L}_1, \mathsf{C}_1 \rangle$ und $\mathsf{K}_2 = \langle \mathbf{L}_2, \mathsf{C}_2 \rangle$ gegeben. Wir

nennen K_1 *definitorische Erweiterung* von K_2, wenn

(1^0) $\mathbf{L}_1$ Erweiterung von $\mathbf{L}_2$ ist;
(2^0) für alle $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}_2$ gilt: $\mathsf{C}_1(\Gamma) = \mathsf{C}_2(\Gamma)$;
(3^0) es für alle $H \in \mathsf{AD}_1$ ein $G \in \mathsf{AD}_2$ derart gibt, daß für alle $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}_1$ gilt: $(H \leftrightarrow G) \in \mathsf{C}_1(\Gamma)$ und $\mathbf{AT}(G) = \mathbf{AT}(H)$.

Ein Kalkül ist *definitorische Version* eines zweiten Kalküls, wenn beide eine gemeinsame definitorische Erweiterung haben.

In den folgenden Abschnitten des Buches werden wir konkrete Beispiele für Konsequenzoperationen kennenlernen. Man kann dabei syntaktisch bestimmte und semantisch bestimmte Konsequenzoperationen unterscheiden. Die entsprechenden Kalküle nennen wir syntaktisch bzw. semantisch bestimmt. Wir wollen diese Unterscheidungsmöglichkeit nun erläutern.

Sei Ax, mit $\mathsf{Ax} \subseteq \mathsf{AD}$, eine ausgezeichnete Menge von Ausdrücken, deren Elemente *Axiome* heißen, und R eine Menge von Schlußregeln. Eine *Schlußregel* ist eine n-stellige Operation auf der Ausdrucksmenge, die von gewissen n Ausdrücken, den *Prämissen* der Schlußregel, auf wieder einen Ausdruck, die *Konklusion*, führt. Axiome können als nullstellige Operationen, also als Schlußregeln mit leerer Prämissenmenge — Axiomregeln genannt — aufgefaßt werden. Das geordnete Paar $\langle \mathsf{Ax}, \mathsf{R} \rangle$ (bzw. die Menge R) führt nun auf eine syntaktisch bestimmte Konsequenzoperation C_1. Für $\Gamma \subseteq \mathsf{AD}$ besteht $\mathsf{C}_1(\Gamma)$ aus allen $H \in \mathsf{AD}$, die folgende Eigenschaft haben: H ist letztes Glied einer endlichen Reihe von Ausdrücken, deren erstes Glied Axiom oder Element von Γ ist und deren folgende Glieder entweder auch Axiome oder Elemente von Γ sind oder Konklusion einer Schlußregel aus R, deren sämtliche Prämissen vorher als Glieder der Reihe auftauchen. Falls C_1 nur von R ausgezeichnet wird, findet man leicht die Modifikation für die Erklärung der Konsequenzoperation. Für syntaktisch bestimmte Konsequenzoperationen C_1 sagen wir von zu $\mathsf{C}_1(\Gamma)$ gehörenden Ausdrücken, daß sie aus Γ *ableitbar* sind. Der Ableitbarkeitsbegriff bezieht sich stets auf eine syntaktisch bestimmte Konsequenz. Das Zeichen $\vdash$, eventuell mit Indizes, reservieren wir von nun an für syntaktische Konsequenzoperationen. Die Sätze syntaktisch bestimmter Kalküle nennen wir *Theoreme*.

Semantisch bestimmte Konsequenzoperationen sind dagegen unter Verwendung von über $\mathbf{L}$ hinausgehenden sprachlichen Mitteln erklärt. Man betrachtet dazu Interpretationen der Ausdrücke in einer strukturierten Menge, d. h. einer Menge M mit einer nichtleeren echten Teilmenge

E von ausgezeichneten Elementen von M und einer Menge O von Operationen in M. Das Tripel $\mathfrak{M} = \langle M, E, O \rangle$ nennen wir eine *Modellstruktur*.

Eine Interpretation (zu diesem Begriff nähere Bemerkungen im Abschnitt 1.4.) eines Kalküls K in $\mathfrak{M}$ *erfüllt* einen Ausdruck H des Kalküls K genau dann, wenn sie H ein Element aus E zuordnet. Eine Menge Γ von Ausdrücken eines Kalküls K heißt bei einer Interpretation in einer Modellstruktur $\mathfrak{M}$ *erfüllbar* genau dann, wenn jeder Ausdruck aus Γ bei dieser Interpretation erfüllt ist. Eine erfüllbare Ausdrucksmenge heißt auch *semantisch widerspruchsfrei*.

Sei $\mathbf{L}$ eine formalisierte Sprache, Γ eine Teilmenge von Ausdrücken dieser Sprache. Dann bestimmen die Modellstrukturen $\mathfrak{M}$ bei Interpretation von $\mathbf{L}$ in $\mathfrak{M}$ eine semantische Konsequenzoperation C': $H \in \mathsf{C}'(\Gamma)$ genau dann, wenn jede Interpretation, die alle Ausdrücke von Γ erfüllt, auch H erfüllt.

Gilt $H \in \mathsf{C}'(\Gamma)$, so sagt man, daß *$H$ aus Γ folgt*. Ausdrucksmengen, die deduktiv abgeschlossen sind bezüglich einer semantisch bestimmten Konsequenz, heißen *semantisch vollständig*.

Eine Interpretation von $\mathbf{L}$ in $\mathfrak{M}$, die einen Ausdruck H bzw. alle Ausdrücke einer Ausdrucksmenge Γ von $\mathbf{L}$ erfüllt, nennt man auch ein *Modell* von H bzw. von Γ. Damit ergibt sich, daß genau dann ein Ausdruck H aus einer Ausdrucksmenge Γ folgt, wenn jedes Modell für Γ auch Modell für H ist. Der Folgerungsbegriff bezieht sich auf semantisch bestimmte Konsequenzoperationen, für entsprechende Konsequenzrelationen verwenden wir das Zeichen $\models$, eventuell mit Indizes. Die Sätze semantisch bestimmter Kalküle nennen wir *Tautologien* oder auch *allgemeingültige Ausdrücke*.

Es seien zwei (streng) äquivalente Kalküle gegeben, von denen der eine, K_1, syntaktisch, der andere, K_2, dagegen semantisch bestimmt ist. In diesem Fall nennen wir K_1 *(streng) vollständig* bezüglich der C_2 auszeichnenden Modellstrukturen und die C_2 auszeichnenden Modellstrukturen *(streng) adäquat* für K_1. K_2 nennen wir durch das C_1 auszeichnende Paar $\langle \mathsf{Ax}, \mathsf{R} \rangle$ *(streng) axiomatisiert*. Streng vollständige Kalküle erweisen sich als kompakt, da die äquivalente, syntaktisch bestimmte Konsequenzoperation stets kompakt ist.

Sei $\mathbf{K}$ die Klasse aller zu einem vorgegebenen Kalkül K oder zu einer seiner definitorischen Versionen streng äquivalenten Kalküle. Dann nennen wir $\mathbf{K}$ ein *logisches System* und die Kalküle von $\mathbf{K}$ verschiedene *Darstellungen* des Systems. Insbesondere nennen wir $\mathbf{K}$ axiomatisiert,

vollständig, entscheidbar usw., wenn es jeweils Darstellungen gibt, die diese Eigenschaften haben.

Der Begriff „logisches System" verallgemeinert also den Kalkülbegriff. Den noch allgemeineren Begriff einer *Logik* wollen wir als Zusammenfassung logischer Systeme unter gewissen Gesichtspunkten verstehen. (Diese Gesichtspunkte können z. B. Eigenschaften der Sprache der einzelnen Systeme betreffen.) Ein und dasselbe logische System kann so zu verschiedenen Logiken gehören.

Das vorliegende Buch ist, wie schon versichert wurde, keine Einführung in die klassische Logik. Wenn wir nun doch auf klassische, d. h. zweiwertige und extensionale logische Systeme zu sprechen kommen, so hat das – wie eingangs schon bemerkt – zwei Gründe. Erstens sollen die vielen bisher gegebenen Definitionen durch Beispiele illustriert werden. Vor allem aber ist die klassische Logik von grundlegender Bedeutung für die nichtklassische. Nichtklassische Systeme erweitern die Möglichkeiten der klassischen, bauen auf ihnen auf und modifizieren die dort genutzten Untersuchungsmethoden. Andererseits läßt sich das in der nichtklassischen Logik neu Erreichte oft in Gegenüberstellung zu den Verhältnissen in der klassischen Logik deutlich machen. Dabei ist in der Mehrzahl der Fälle bereits die klassische Aussagenlogik hierfür ausreichend, einfach weil die nichtklassischen Systeme in der Regel auf aussagenlogischer Basis entwickelt werden.
Der Grund dafür ist, daß sich die semantischen Besonderheiten der aufzubauenden nichtklassischen Logiken oft bereits mit diesen Ausdrucksmitteln hinreichend klar explizieren lassen. Der Übergang zu prädikatenlogischen Ausdrucksmengen wird nur dann vollzogen, wenn dadurch weitere semantische Eigentümlichkeiten sichtbar gemacht werden können, denn ein solcher Übergang geht zu Lasten der Anschaulichkeit der entstehenden Kalküle. Prädikatenlogische Systeme höherer Stufe, wie auch Systeme in Sprachen mit erweiterter Ausdrucksdefinition spielen im Hinblick auf deren Anwendung in der nichtklassischen Logik eine noch geringere Rolle und werden in diesem Buch nicht besprochen. Deshalb sollen nur die Systeme der klassischen Aussagen- und der klassischen Prädikatenlogik der ersten Stufe – von nun an kurz: klassische Prädikatenlogik – in Erinnerung gerufen werden. Bei dieser Gelegenheit treffen wir weitere Verabredungen hinsichtlich der Symbolik und Terminologie.

Die klassische Aussagenlogik besteht aus einem einzigen logischen System, für das sehr viele verschiedene Darstellungen bekannt sind. Wir geben einige von ihnen an.

Die übliche formale Sprache für aussagenlogische Kalküle hat einen einstelligen Junktor $\sim$ (*Negator* genannt) und vier zweistellige: $\wedge$ (*Konjunktor*), $\vee$ (*Alternator*), $\rightarrow$ (*Implikator*) und $\leftrightarrow$ (*Äquivalentor*), sowie technische Zeichen:),(. Ausgehend von einer abzählbar unendlichen Menge AV atomarer Ausdrücke $\{p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, \ldots\}$, *Aussagenvariablen* genannt, werden rekursiv die aussagenlogischen Ausdrücke aufgebaut. Die Menge AD der *aussagenlogischen Ausdrücke* ist die kleinste aller Mengen, die AV enthalten und zu denen mit H und G stets auch $(\sim H)$ (*Negation* von H), $(H \wedge G)$ (*Konjunktion*), $(H \vee G)$ (*Alternative*), $(H \rightarrow G)$ (*Implikation*) und $(H \leftrightarrow G)$ (*Äquivalenz*) gehören. Um die zusammengesetzten Ausdrücke in der Umgangssprache kürzer wiederzugeben, hat sich auch folgende Lesart eingebürgert: „nicht H“, „H und G“, „H oder G“, „wenn H, dann G“ bzw. „H genau dann, wenn G“.

Wir vereinbaren, daß die Bindungsstärke der Junktoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ in dieser Reihenfolge abnimmt und daß überflüssige Klammern weggelassen werden können. Dieser Klammerkonvention zufolge ist beispielsweise $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_3 \vee p_4 \wedge \sim p_5$ aus $\big((p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_4 \wedge (\sim p_5)))\big)$ entstanden.

Wir geben nun in der oben erklärten Sprache zunächst einen semantisch bestimmten Kalkül $\mathsf{K}_1 = \langle \mathbf{L}, \models_1 \rangle$ an, dem aus historischen Gründen und seiner intuitiven Einsichtigkeit wegen besonderes Interesse gebührt.

Für jeden der Junktoren wird eine Tabelle der beiden Wahrheitswerte W und F aufgestellt, die den mittels des entsprechenden Junktors zusammengesetzten Ausdrücken einen Wahrheitswert auf Grund der Wahrheitswerte der verbundenen Ausdrücke zuordnet:

H	G	$\sim H$	$H \wedge G$	$H \vee G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

So legt jede Zuordnung von Wahrheitswerten zu den atomaren Ausdrücken, *Belegung* genannt, genau einen Wahrheitswert für jeden bestimmten Ausdruck fest.

Für Konsequenzrelation $\models_1$ ist erklärt als: Für alle Γ, $\Gamma \subseteq$ AD, und für alle H, $H \in$ AD, gilt nach Definition $\Gamma \models_1 H$ genau dann, wenn für alle Belegungen gilt: wenn alle Ausdrücke aus Γ bei einer Belegung den Wert W erhalten, so erhält H bei dieser Belegung den Wert W.

Man sieht leicht, daß K_1 entscheidbar ist. Um nämlich die Frage, ob ein Ausdruck H eine Tautologie ist, zu beantworten, genügt es, den Wahrheitswert von H in allen verschiedenen Belegungen für in H vorkommende atomare Ausdrücke zu prüfen. Da H nur endlich viele atomare Ausdrücke enthält, ist die Zahl der zu untersuchenden Fälle ebenfalls endlich.

In leicht veränderter Aufmachung stellt sich der Kalkül K_1 so dar: Sei v_0 eine Abbildung von AV nach {F, W}. Diese wird eindeutig zum Homomorphismus v von AD nach {F, W}, wiederum Belegung genannt, fortgesetzt:

(1⁰)	$v(H)$	$= v_0(H)$	für	$H \in$ AV;
(2⁰)	$v(\sim H)$	= W	gdw	$v(H) =$ F;
(3⁰)	$v(H \wedge G)$	= W	gdw	$v(H) =$ W und $v(G) =$ W;
(4⁰)	$v(H \vee G)$	= F	gdw	$v(H) =$ F und $v(G) =$ F;
(5⁰)	$v(H \rightarrow G)$	= F	gdw	$v(H) =$ W und $v(G) =$ F;
(6⁰)	$v(H \leftrightarrow G)$	= W	gdw	$v(H) = v(G)$.

Wieder ist $\Gamma \models_1 H$ gdw für alle Belegungen v gilt: Wenn für alle Ausdrücke G aus Γ $v(G) =$ W, so $v(H) =$ W.

Ein anderer Kalkül, K_2, wird syntaktisch bestimmt. Die Konsequenzrelation wird durch ein Axiome-Regeln-Paar festgelegt. Die Menge Ax umfaßt folgende Ausdrücke:

(Ax1) $p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$

(Ax2) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$

(Ax3) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$

(Ax4) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$

(Ax5) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_2$

(Ax6) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2 \wedge p_3))$

(Ax7) $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$

(Ax8) $p_2 \to (p_1 \vee p_2)$

(Ax9) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \vee p_2 \to p_3))$

(Ax10) $(p_1 \leftrightarrow p_2) \to (p_1 \to p_2)$

(Ax11) $(p_1 \leftrightarrow p_2) \to (p_2 \to p_1)$

(Ax12) $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to p_1) \to (p_1 \leftrightarrow p_2))$

(Ax13) $(p_1 \to p_2) \to (\sim p_2 \to \sim p_1)$

(Ax14) $p_1 \to \sim\sim p_1$

(Ax15) $\sim\sim p_1 \to p_1$.

Die Menge der Schlußregeln besteht aus:

(R1) $\dfrac{H, H \to G}{G}$

(R2) $\dfrac{H}{H[p/G]}$

Die Regel (R1) ist als *Abtrennungsregel* oder *modus ponens* bekannt, die als *Einsetzungsregel* bezeichnete Regel (R2) ist wie folgt zu verstehen: vom Ausdruck H kann man zu einem Ausdruck übergehen, der aus H durch Ersetzen einer in H vorkommenden Aussagenvariable p gleichzeitig an allen Stellen ihres Vorkommens in H durch einen beliebigen anderen Ausdruck G entsteht. Diese Einsetzungsregel ist jedoch bei Ableitungen aus nichtleeren Ausdrucksmengen nur beschränkt zugelassen. Um damit verbundenen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, behilft man sich in der Regel folgendermaßen: anstelle der Axiome (Ax1)–(Ax15) verwendet man *Axiomschemata*, in denen die Aussagenvariablen durch Ausdrücke ersetzt sind, also beispielsweise anstelle des Axioms $p_1 \to (p_2 \to p_1)$ das Axiomschema $H_1 \to (H_2 \to H_1)$, wobei H_1 und H_2 beliebige Ausdrücke sind. Auf die Einsetzungsregel wird ganz verzichtet.

Der Fakt, daß K_1 und K_2 streng äquivalent und also tatsächlich Darstellungen ein und desselben Systems sind, ist wohlbekannt. Den Beweis des „schwierigeren" strengen Enthaltenseins von K_1 in K_2 findet man z. B. in Asser [1959].

Mit dem Vorliegen der streng äquivalenten Kalküle K_1 und K_2 wissen wir u. a. bereits folgendes: Die klassische Aussagenlogik ist ein axiomatisiertes, entscheidbares, kompaktes System mit intuitiv einsichtiger, adäquater Semantik. Ferner ist die aussagenlogische Satzmenge deduktiv abgeschlossen und – obwohl klassisch konsistent – nicht klassisch vollständig, jedoch syntaktisch vollständig. (Lediglich letztere Eigenschaft ist nicht ganz einfach zu beweisen, siehe dazu Asser [1959].)

Schließlich sei mit K_3 noch eine definitorische Version der Aussagenlogik vorgestellt. Wir betrachten die aus AV mittels $\sim$ und $\to$ aufgebaute Sprache $\mathbf{L}(\sim, \to)$ und legen $\vdash_3$ durch die Axiomenschemata-Regel-Menge fest:

(AxS1) $H_1 \to (H_2 \to H_1)$

(AxS2) $(H_1 \to (H_2 \to H_3)) \to ((H_1 \to H_2) \to (H_1 \to H_3))$

(AxS3) $(\sim H_1 \to \sim H_2) \to (H_2 \to H_1)$

(R1) $\dfrac{H, H \to G}{G}$.

Aus der strengen Äquivalenz von K_3 zu den anderen Kalkülen ergibt sich die Definierbarkeit aller Ausdrücke der „vollen" aussagenlogischen Sprache mittels $\sim$ und $\to$: $H \wedge F \overset{\text{def}}{=} \sim(H \to \sim F)$, $H \vee F \overset{\text{def}}{=} \sim H \to F$, $H \leftrightarrow F \overset{\text{def}}{=} (H \to F) \wedge (F \to H)$. Darüber hinaus können überhaupt alle zweiwertigen extensionalen Junktoren durch $\sim$ und $\to$ definiert werden. Wir sagen deshalb, daß $\mathbf{L}(\sim, \to)$ in der Aussagenlogik *funktional vollständig* ist.

1.4. Klassische Prädikatenlogik

Wir beschränken unsere Darstellung weiterhin auf ein für die folgenden Abschnitte hinreichendes Minimum. Ausführlich wird die Thematik beispielsweise in Asser [1972] behandelt, in einer um Funktionssymbole, Gegenstandskonstanten, die Gleichheit (Identität) und den bestimmten Artikel erweiterten Sprache.

Die klassische Prädikatenlogik besteht ebenfalls nur aus einem einzigen System. Die prädikatenlogische Sprache, $\mathbf{L}_1$, ist dagegen wesentlich komplizierter als die aussagenlogische. Zum Aufbau von Ausdrücken haben wir zwei abzählbar unendliche Mengen von Gegenstands- (oder Individuen-) variablen $\mathsf{IV} = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$ und von Prädikatensymbolen $\Pi = \{P, Q, P_1, Q_1, \ldots\}$, sowie eine Abbildung $\mathsf{ar}\colon \Pi \to \mathbb{N}$

(„$\mathbb{N}$“ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen), die jedem Prädikatensymbol seine Stellenzahl zuordnet. Das Paar (Π, ar) heißt die *Signatur* Σ der formalisierten Sprache. Die Stellenzahl von $P, Q, \ldots$ wird mit $\mathsf{ar}(P), \mathsf{ar}(Q), \ldots$ bezeichnet. Atomare Ausdrücke sind Prädikatensymbole, auf die ebensoviel in Klammern gesetzte Gegenstandsvariablen folgen, als ihre Stellenzahl beträgt. Die Menge der atomaren Ausdrücke sei AT.

Auch die Mittel für den Aufbau von Ausdrücken sind gegenüber dem aussagenlogischen Fall erweitert. Es kommen zwei Quantoren dazu: der *Allquantor* oder *Generalisator* $\wedge$ und der *Existenzquantor* oder *Partikularisator* $\vee$. Prädikatenlogische Ausdrücke werden aus atomaren Ausdrücken mittels $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$ wie üblich gebildet. Neu hinzu kommen Zeichenreihen, in denen ein Quantor von einer Gegenstandsvariablen und einem Ausdruck gefolgt wird. Die Menge der prädikatenlogischen Ausdrücke, AD_1, ist die kleinste Menge, zu der mit H, G stets auch $\sim H$, $\wedge xH$, $\vee xH$, $H \wedge G$, $H \vee G$, $H \rightarrow G$ und $H \leftrightarrow G$ gehören. Der zweite Ausdruck wird als *Generalisation*, der dritte als *Partikularisation* bezeichnet. $\wedge xH$ wird als „für alle x gilt H“ und $\vee xH$ als „es gibt ein x derart, daß H“ gelesen. Die in einem Ausdruck H unmittelbar auf einen Quantor folgenden Gegenstandsvariablen kommen in H von den jeweiligen Quantoren *gebunden* vor. Die übrigen in H vorkommenden Gegenstandsvariablen kommen in H *frei* vor. Der unmittelbar auf $\wedge x$ oder $\vee x$ folgende Ausdruck ist der *Bereich* des Quantors. Mit $H(x/y)$ wird der Ausdruck bezeichnet, der aus H durch Ersetzen der Gegenstandsvariable x an allen Stellen ihres freien Vorkommens in H durch die Gegenstandsvariable y entsteht. Ein solches Einsetzen von y für x in H ist *zulässig*, wenn x nicht frei im Bereich eines y bindenden Quantors vorkommt. $H[x/y]$ bezeichnet den aus H durch zulässige Einsetzung (x/y) entstandenen Ausdruck. Der Ausdrucksreichtum der Prädikatenlogik schließt denjenigen der Aussagenlogik gewissermaßen in sich ein. Wenn man nullstellige Prädikatensymbole betrachtet, so verhalten sich diese gerade wie Aussagenvariablen.

Als erste Darstellung der Prädikatenlogik geben wir einen semantisch bestimmten Kalkül K_1' an. Wir definieren dazu zunächst den in Abschnitt 1.2. bereits benutzten Begriff einer *Interpretation*. Eine Interpretation der Signatur $\Sigma = (\Pi, \mathsf{ar})$ ist ein geordnetes Paar $\mathfrak{I} = \langle W, \{R_p\}_{p \in \Pi}\rangle$ derart, daß W eine nichtleere Menge von Gegenständen (Gegenstands- oder Individuenbereich genannt) und für jedes Prädikatensymbol $P \in \Pi$ R_P eine Relation in W der Stellenzahl $\mathsf{ar}(P)$ ist. Für eine gegebene Interpretation $\mathfrak{I}$ der Signatur Σ nennen wir eine beliebige Abbildung v von der Menge der Gegenstandsvariablen nach W eine *Belegung* in $\mathfrak{I}$. Den durch die Abbildung v einer Gegenstandsvariablen α zugeordneten Gegenstand aus W bezeichnen wir mit $v(\alpha)$, die einem Prädikatensymbol β bei einer Interpretation $\mathfrak{I}$ zugeordnete Relation R_β in W mit $\mathfrak{I}(\beta)$.

Für H, $H \in \mathsf{AD}_1$, erklären wir induktiv, wann eine Belegung v in $\mathfrak{I}$ den Ausdruck H *erfüllt*, symbolisch: $\mathfrak{I}, v \models H$, gelesen: H ist durch v in $\mathfrak{I}$ erfüllt, oder: H ist $(\mathfrak{I}, v)$-gültig.

(1)	$\mathfrak{I}, v \models P(x_1, \ldots, x_n)$	gdw	$\mathfrak{I}(P)\,(v(x_1), \ldots, v(x_n))$;
(2)	$\mathfrak{I}, v \models \sim H$	gdw	nicht $\mathfrak{I}, v \models H$;
(3)	$\mathfrak{I}, v \models H \wedge G$	gdw	$\mathfrak{I}, v \models H$ und $\mathfrak{I}, v \models G$;
(4)	$\mathfrak{I}, v \models H \vee G$	gdw	$\mathfrak{I}, v \models H$ oder $\mathfrak{I}, v \models G$;
(5)	$\mathfrak{I}, v \models H \rightarrow G$	gdw	wenn $\mathfrak{I}, v \models H$, dann $\mathfrak{I}, v \models G$;
(6)	$\mathfrak{I}, v \models H \leftrightarrow G$	gdw	$\mathfrak{I}, v \models H$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}, v \models G$;
(7)	$\mathfrak{I}, v \models \wedge xH$	gdw	für alle Belegungen v', die sich von v höchstens im Wert für x unterscheiden gilt: $\mathfrak{I}, v' \models H$;
(8)	$\mathfrak{I}, v \models \vee xH$	gdw	für eine Belegung v', die sich von v höchstens im Wert für x unterscheidet, gilt: $\mathfrak{I}, v' \models H$.

Statt „$\mathfrak{I}, v \models H$“ wird – mit derselben Bedeutung – auch: $\mathrm{Wert}_{\mathfrak{I}}(H, v) = \mathsf{W}$, geschrieben, wobei die Interpretation auch durch einen anderen großen gotischen Buchstaben bezeichnet sein kann, ebenso die Belegung durch einen anderen kleinen Buchstaben.

Wenn H durch jedes v in $\mathfrak{I}$ erfüllt ist, so heißt H ein $\mathfrak{I}$-*gültiger* Ausdruck und $\mathfrak{I}$ ist ein *Modell* von H. Ist H $\mathfrak{I}$-gültig für beliebiges $\mathfrak{I}$, so heißt H *allgemeingültig*. Die $\mathfrak{I}$-Gültigkeit von H wird angezeigt durch: $\mathfrak{I} \models H$, die Allgemeingültigkeit von H durch: $\models H$. Der wichtige Begriff des Modells läßt sich – wie schon bemerkt – auf Mengen Γ von Ausdrücken erweitern: $\mathfrak{I} \models \Gamma$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}$ Modell von allen Ausdrücken aus Γ ist.

Der Kalkül K_1' ist nun durch die folgende semantische Konsequenzoperation $\models_1$ in der prädikatenlogischen Sprache festgelegt: $\Gamma \models_1 H$

genau dann, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{J}$ gilt: Wenn $\mathfrak{J} \models G$ für jedes $G \in \Gamma$, dann $\mathfrak{J} \models H$.

Ein syntaktisch bestimmter Kalkül K_2' entsteht durch Erweiterung des Axiomschemata-Regeln-Paares des aussagenlogischen Kalküls K_2. Zu (AxS1)–(AxS15), (R1), kommen hinzu:

(AxS16) $\wedge x(H_1 \to H_2) \to (H_1 \to \wedge x H_2)$,

wobei x eine Gegenstandsvariable ist, die nicht frei in H_1 vorkommt;

(AxS17) $\wedge x H_1 \to H_1[x/y]$,

wobei $[x/y]$ wieder eine zulässige Einsetzung ist;

(R3) $\dfrac{H}{\wedge x H}$.

Die Regel (R3) wird *Generalisierungs-* oder GÖDEL*regel* genannt.

Ähnlich wie im aussagenlogischen Fall folgt aus dem Vorliegen der beiden Darstellungen K_1' und K_2' der klassischen Prädikatenlogik, daß dieses System axiomatisierbar ist, über eine adäquate Semantik verfügt usw. Wir hatten gesehen, daß die aussagenlogische Satzmenge auf einfache Art und Weise entscheidbar ist. Diese Eigenschaft besitzt die Prädikatenlogik jedoch nicht.

In den folgenden Kapiteln werden wir verschiedentlich statt der umgangssprachlichen Wörter „nicht", „und", „oder", „wenn ..., dann ...", „... genau dann, wenn ...", „für alle ... gilt ..." und „es gibt ein ... derart, daß ..." jeweils die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\bigwedge$ und $\bigvee$ verwenden. Diese sind den Junktoren der prädikatenlogischen Sprache nachgebildet, verknüpfen aber keine prädikatenlogischen Ausdrücke, sondern Ausdrücke einer Metasprache, d. h. einer Sprache, in der über die Ausdrücke der jeweiligen formalen Sprache geredet wird. $\neg$, $\wedge$ usw. nennen wir *metasprachliche Operatoren.*

2. Mehrwertige Logik

2.1. Grundprinzipien der mehrwertigen Logik

Jedes der beiden grundlegenden Prinzipien der klassischen Logik – das Extensionalitätsprinzip und das Zweiwertigkeitsprinzip – kann im Bereich nichtklassischer logischer Systeme aufgegeben werden. Das Extensionalitätsprinzip gilt nicht in den Systemen der modalen Logik; vgl. **3.1**.

Die mehrwertige Logik, mit der wir uns in diesem Kapitel befassen werden, behält das Extensionalitätsprinzip bei, verzichtet aber auf das Zweiwertigkeitsprinzip.

Die erste und auffälligste Konsequenz dieses Schrittes ist, daß die in der klassischen Logik unterstellte Beziehung zu den Wahrheitswerten W und F ihre Natürlichkeit verliert. Es gibt bis heute keine wirklich überzeugende Deutung der in der mehrwertigen Logik „zusätzlich" betrachteten Wahrheitswerte, die jene Werte mit dem naiven Verständnis von Wahrsein bzw. von Abstufungen dieses Wahrseins verbindet. Es ist dies einer der Gründe, weswegen wir in diesem Kapitel von *Quasiwahrheitswerten* sprechen werden – und weswegen brauchbare Anwendungen der mehrwertigen Logik wesentlich sind, um zu verdeutlichen, daß es sich bei der mehrwertigen Logik um mehr als ein esoterisches Teilgebiet der nichtklassischen Logik handelt.

Das Extensionalitätsprinzip besagt im Bereich der mehrwertigen Aussagenlogik wieder, daß der Quasiwahrheitswert einer zusammengesetzten (mehrwertigen) Aussage nur abhängt von den Quasiwahrheitswerten der dabei miteinander verknüpften (mehrwertigen) Aussagen. Und im Bereich der mehrwertigen Prädikatenlogik besagt er darüber hinaus, daß ein Prädikat, also ein Begriff, schon durch seinen Umfang vollständig charakterisiert ist. (Wobei in diesem Falle noch genau zu klären ist, was dabei unter „Umfang" zu verstehen ist – vgl. **2.3.1.**)

Ganz analog zur Situation hinsichtlich des Extensionalitätsprinzips in der modalen Logik, vgl. Kap. **3**, tritt an die Stelle des Zweiwertigkeitsprinzips hier kein neues Prinzip. Wir wollen also keine generelle Festlegung darüber treffen, ob im Bereich mehrwertiger Logik nun statt zweier (Wahrheits-) Werte deren drei, vier, fünf, ... oder evtl. auch un-